

PERIODICAL

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE

DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

J. RADON

WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

N. HOFREITER

WIEN

58. BAND, 3. HEFT

MIT 11 TEXTABBILDUNGEN

(AUSGEGEBEN IM SEPTEMBER 1954)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1954

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfangs, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mülkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

58. Band/3. Heft

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Eberl, W. Ein Zufallsweg in einer Markoffschen Kette von Alternativen	137
Hofmann, L. Über die Herstellung achsialer Lagen von kollinearen Räumen bei Zugrundelegung einer elliptischen Metrik	143
Tricomi, F. G. Beispiel einer Strömung mit Durchgang durch die Schall- geschwindigkeit	160
Reiter, H. Über L^1 -Räume auf Gruppen II	172
Nöbauer, W. Über eine Gruppe der Zahlentheorie	181
Horninger, H. Über Trochoidenschraublinien und die durch Trochoidenschraubung erzeugbaren Kreisschraubflächen	193
Buchbesprechungen	213

Ein Zufallsweg in einer Markoffschen Kette von Alternativen.

Von

W. Eberl, Wien.

(Eingelangt am 4. Februar 1954.)

1. Die Aufgabe.

Ein Teilchen, das sich zu Beginn seiner Bewegung auf der Zahlengeraden im ganzzahligen Punkt z befindet ($0 < z < k$), legt bei jedem Schritt den Weg $+1$ oder -1 mit den bezüglichen Wahrscheinlichkeiten p_1 , $q_1 = 1 - p_1$ oder q_2 , $p_2 = 1 - q_2$ zurück, je nachdem der unmittelbar vorangehende Schritt $+1$ oder -1 war. Die Punkte 0 und k sind Absorptionsschranken. Es sind die bezüglichen Absorptionswahrscheinlichkeiten und die wahrscheinliche Dauer der Wanderung zu ermitteln.

Dieselbe Aufgabe läßt sich auch als Spielproblem formulieren und bildet dann eine Erweiterung der Frage nach dem Ruin des einen von 2 Spielern bei unabhängigen Grundwahrscheinlichkeiten und begrenztem Vermögen beider Spieler.

2. Gewinnung der erzeugenden Funktionen aus einem System von Differenzgleichungen.

Wir bezeichnen je nachdem, ob die Wahrscheinlichkeiten des 1. Schrittes p_1 , q_1 oder q_2 , p_2 sind, mit $a_{z,n}$ und $b_{z,n}$ die Wahrscheinlichkeiten, daß das Teilchen nach n Schritten erstmalig den Punkt 0 erreicht. Für die $a_{z,n}$ und $b_{z,n}$ gilt dann offenbar das System von Differenzgleichungen:

$$\begin{aligned} a_{z,n+1} &= p_1 a_{z+1,n} + q_1 b_{z-1,n} \\ b_{z,n+1} &= q_2 a_{z+1,n} + p_2 b_{z-1,n} \end{aligned} \quad (1)$$

mit den Randbedingungen $a_{k,n} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $b_{0,0} = 1$,

$$b_{0,n} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad a_{z,0} = b_{z,0} = 0 \quad (z = 1, 2, \dots, n-1).$$

Wir führen nun die erzeugenden Funktionen

$$A_z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{z,n} s^n \quad \text{und} \quad B_z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{z,n} s^n \quad \text{ein.}$$

Multiplikation der Gln. (1) mit s^{n+1} und Addition über $n = 0, 1, 2, \dots$ liefert, wenn wir das Argument s weglassen:

$$\begin{aligned} A_z &= p_1 s A_{z+1} + q_1 s B_{z-1} \\ B_z &= q_2 s A_{z+1} + p_2 s B_{z-1} \end{aligned} \quad (2)$$

mit den Randbedingungen $A_k = 0$, $B_0 = 1$. Wir durften dabei

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{z,n+1} s^{n+1} = A_z(s)$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_{z,n+1} s^{n+1} = B_z(s)$ setzen, da wir z auf die Werte von 1 bis $n-1$ beschränken, für die auf Grund der Randbedingungen $a_{z,0} = b_{z,0} = 0$ ist. Elimination von B_z führt auf die Differenzengleichung 2. Ordnung:

$$p_1 s A_{z+2} - [1 + (p_1 p_2 - q_1 q_2) s^2] A_{z+1} + p_2 s A_z = 0. \quad (3)$$

Der Ansatz $A_z = \lambda^z(s)$ liefert zur Bestimmung von λ :

$$p_1 s \lambda^2 - [1 + (p_1 p_2 - q_1 q_2) s^2] \lambda + p_2 s = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$\lambda_2 = \frac{1}{2p_1 s} [1 + (p_1 p_2 - q_1 q_2) s^2 \pm \sqrt{1 - 2(p_1 p_2 + q_1 q_2) s^2 + (p_1 p_2 - q_1 q_2)^2 s^4}].$$

Die allgemeine Lösung heißt also $A_z = C_1 \lambda_1^z + C_2 \lambda_2^z$. Aus der 1. Gl. (2)

$$\text{gewinnen wir} \quad B_z = \frac{1}{q_1 s} (A_{z+1} - p_1 s A_{z+2}) =$$

$$\frac{1}{q_1 s} [C_1 \lambda_1 (1 - p_1 s \lambda_1) \lambda_1^z + C_2 \lambda_2 (1 - p_1 s \lambda_2) \lambda_2^z]. \quad C_1 \text{ und } C_2 \text{ bestimmen sich aus}$$

$$A_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k = 0$$

und

$$B_0 = C_1 \frac{\lambda_1 (1 - p_1 s \lambda_1)}{q_1 s} + C_2 \frac{\lambda_2 (1 - p_1 s \lambda_2)}{q_1 s} = 1.$$

Wir führen für beliebige ganze n die Bezeichnung

$$Q_n = (p_1 s)^n (\lambda_1^n - \lambda_2^n)$$

ein und bekommen dann

$$C_1 = -\frac{q_1}{p_2} \frac{(p_1 \lambda_2 s)^k}{Q_{k-1} - p_1 p_2 s^2 Q_{k-2}}, \quad C_2 = \frac{q_1}{p_2} \cdot \frac{(p_1 \lambda_1 s)^k}{Q_{k-1} - p_1 p_2 s^2 Q_{k-2}}.$$

Einsetzen von C_1 und C_2 führt unter Beachtung von $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{p_2}{p_1}$ auf

$$A_z = \frac{q_1 p_2^{z-1} s^z Q_{k-z}}{Q_{k-1} - p_1 p_2 s^2 Q_{k-2}}, \quad B_z = (p_2 s)^z \frac{Q_{k-z-1} - p_1 p_2 s^2 Q_{k-z-2}}{Q_{k-1} - p_1 p_2 s^2 Q_{k-2}}. \quad (4)$$

Die erzeugenden Funktionen für das Eintreffen in k sind

$$\bar{A}_z = (p_1 s)^{k-z} \frac{Q_{z-1} - p_1 p_2 s^2 Q_{z-2}}{Q_{k-1} - p_1 p_2 s^2 Q_{k-2}}, \quad \bar{B}_z = \frac{q_2 p_1^{k-z-1} s^{k-z} Q_z}{Q_{k-1} - p_1 p_2 s^2 Q_{k-2}}. \quad (5)$$

Man erhält sie durch entsprechende Abänderung der Randbedingungen oder indem man in A_z und B_z p_1, q_1, z durch $p_2, q_2, k-z$ ersetzt und umgekehrt.

Durch Spezialisierung $p_1 = q_2 = p$ und $p_2 = q_1 = q$ gewinnen wir aus A_z und B_z , die in diesem Sonderfall übereinstimmen, die erzeugende Funktion für die Zufallswanderung bei festbleibenden Grundwahrscheinlichkeiten p und $q=1-p$. Die Gl. (3), der mit λ_1^z und λ_2^z auch $P_z = \lambda_1^z - \lambda_2^z$ genügt, vereinfacht sich jetzt zu $ps P_z - P_{z-1} + qs P_{z-2} = 0$, der gemeinsame Nenner $Q_{k-1} - p_1 p_2 s^2 Q_{k-2}$ von A_z und B_z wird gleich $(ps)^k P_k$ und man erhält als gemeinsamen Wert

$$U_z(s) = \left(\frac{q}{p}\right)^z \frac{P_{k-z}(s)}{P_k(s)}.$$

3. Wahrscheinlichkeiten für das Erreichen einer Schranke.

Sind die Wahrscheinlichkeiten des nächsten Versuches p_1 und q_1 , so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Schranke 0 erreicht wird,

$$A_z(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{z,n}.$$

$${}_1\lambda_2(1) = \frac{1}{2p_1} [1 + (p_1 p_2 - q_1 q_2) \pm \sqrt{1 - 2(p_1 p_2 + q_1 q_2) + (p_1 p_2 - q_1 q_2)^2}] =$$

$$\frac{1}{2p_1} [1 + (p_1 + p_2 - 1) \pm \sqrt{1 - 2[p_1 p_2 + (1 + p_1)(1 - p_2)] + (p_1 + p_2 - 1)^2}] =$$

$$\frac{1}{2p_1} [(p_1 + p_2) \pm (p_1 - p_2)], \quad \lambda_1(1) = 1, \quad \lambda_2(1) = \frac{p_2}{p_1}, \quad P_n = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^n.$$

¹ W. Feller, Probability Theory (1950) S. 289.

$$A_z(1) = \frac{p_1^{k-z} p_2^{z-1} q_1 - p_2^{k-1} q_1}{p_1^{k-1} q_2 - p_2^{k-1} q_1}, \quad \bar{A}_z(1) = \frac{p_1^{k-1} q_2 - p_1^{k-z} p_2^{z-1} q_1}{p_1^{k-1} q_2 - p_2^{k-1} q_1},$$

also $A_z(1) + \bar{A}_z(1) = 1$, das Teilchen langt mit der Wahrscheinlichkeit 1 in 0 oder k ein. Analog ergibt sich $B_z(1) + \bar{B}_z(1) = 1$.

Im Falle $p_1 = p_2 = p$ liefert die Regel von de l'Hospital

$$A_z(1) = \frac{(k-z)q}{(k-1)q+p}, \quad \bar{A}_z(1) = \frac{(z-1)q+p}{(k-1)q+p}.$$

4. Reihenentwicklung der erzeugenden Funktionen.

Da s in λ_1 und λ_2 unter der Wurzel im allgemeinen in der 4. und außerhalb der Wurzel in der 1. Potenz vorkommt, versagt die beim gewöhnlichen Zufallsweg gebräuchliche Methode der Einführung von Kreisfunktionen. Im folgenden wird eine explizite Darstellung der Koeffizienten durch wiederholte Entwicklung in Binomialreihen gewonnen.

Es ist $Q_n = (p_1 s)^n (\lambda_1^n - \lambda_2^n) = (a+b)^n - (a-b)^n$, wenn wir

$a = \frac{1}{2} [1 + (p_1 p_2 - q_1 q_2) s^2]$ und $b = \frac{1}{2} [1 - 2(p_1 p_2 + q_1 q_2) s^2 + (p_1 p_2 - q_1 q_2)^2 s^4]^{1/2}$ setzen. Weiter wird $Q_n = 2 \left[\binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots \right] = 2 b \bar{Q}_n$, wobei $\bar{Q}_n$ ein Polynom in s ist. Die Koeffizienten dieses Polynoms sind ganze rationale Funktionen von p_1 und p_2 , das konstante Glied von $\bar{Q}_n$ hat für $n \neq 0$ wegen $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = 2^{n-1}$ den Wert 1 ($\bar{Q}_0 = 0$). Kürzen wir also (4) und (5) durch $2b$ und denken wir uns anschließend an Stelle von $\bar{Q}_n$ wieder Q_n geschrieben, so bleiben die Formeln (4) und (5) erhalten. $A_z(s), \dots$ sind also in p_1, p_2 und s rational.

Für die Q_n gilt wegen (3) die Rekursionsformel $Q_n = c Q_{n-1} - d Q_{n-2}$, wo $c = 1 + (p_1 p_2 - q_1 q_2) s^2$ und $d = p_1 p_2 s^2$ ist.

$A_z(s), \dots$ sind Linearkombinationen von Funktionen der Form $\frac{Q_l}{Q_m - d Q_{m-1}}$, wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, daß l und m natürliche Zahlen sind und $l < m$ ist. Die nun folgende wiederholte binomische Entwicklung rechtfertigt sich durch die Feststellung, daß

$$\left| \frac{d}{c} \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \right| \quad \text{und} \quad \left| d \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \right|$$

für absolut kleines s kleiner als 1 sind.

$$\frac{Q_l}{Q_m - d Q_{m-1}} = \frac{Q_l}{Q_m} \cdot \frac{1}{1 - d \frac{Q_{m-1}}{Q_m}} = \frac{Q_l}{Q_m} \sum_{k_1} d^{k_1} \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right)^{k_1} =$$

$$= \frac{Q_l}{Q_{m-1}} \sum_{k_1} d^{k_1} \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_m} \right)^{k_1+1}.$$

Die Gleichung

$$\left(\frac{Q_{m-p}}{Q_{m-p+1}} \right)^{k_p+1} = \left[c \left(1 - \frac{d}{c} \frac{Q_{m-p-1}}{Q_{m-p}} \right) \right]^{-(k_p+1)} =$$

$$= \frac{Q_{m-p}}{Q_{m-p-1}} \cdot \frac{1}{c^{k_p+1}} \sum_{k_{p+1}} \binom{k_p+k_{p+1}}{k_{p+1}} \frac{d^{k_p+1}}{c^{k_p+1}} \cdot \left(\frac{Q_{m-p-1}}{Q_{m-p}} \right)^{k_{p+1}+1}$$

denken wir uns für $p = 1, \dots, m-l-1$ angeschrieben. Für $p=m-l$ ist

$$\left(\frac{Q_l}{Q_{l+1}} \right)^{k_{m-l}+1} = \frac{1}{c^{k_{m-l}+1}} \sum_{k_{m-l+1}} \binom{k_{m-l}+k_{m-l+1}}{k_{m-l+1}} \frac{d^{k_{m-l}+1}}{c^{k_{m-l}+1}} \left(\frac{Q_{l-1}}{Q_l} \right)^{k_{m-l+1}}.$$

Für $p = m-l+1, \dots, m-2$ schreiben wir:

$$\left(\frac{Q_{m-p}}{Q_{m-p+1}} \right)^{k_p} = \frac{1}{c^{k_p}} \sum_{k_{p+1}} \binom{k_p+k_{p+1}-1}{k_{p+1}} \frac{d^{k_p+1}}{c^{k_p+1}} \left(\frac{Q_{m-p-1}}{Q_{m-p}} \right)^{k_{p+1}}.$$

Schließlich ist $\left(\frac{Q_1}{Q_2} \right)^{k_{m-1}} = \frac{1}{c^{k_{m-1}}}.$

Wenn wir jetzt bei der letzten Gleichung beginnend von Gleichung zu Gleichung rückschreitend einsetzen, so erhalten wir

$$\frac{Q_l}{Q_m - d Q_{m-1}} = \frac{Q_l}{Q_{m-1}} \cdot \frac{Q_{m-1}}{Q_{m-2}} \dots \frac{Q_{l+1}}{Q_l} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_{m-1}} P_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}},$$

dabei ist gesetzt:

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}} = \prod_{\mu=1}^{m-1} \binom{k_{\mu}+k_{\mu+1}}{k_{\mu+1}} \prod_{\nu=m-l+1}^{m-2} \binom{k_{\nu}+k_{\nu+1}-1}{k_{\nu+1}}$$

$$\frac{d^{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}}}{c^{k_1+1+2k_2+1+\dots+2k_{m-1}+1+2k_{m-l+1}+\dots+2k_{m-1}}}$$

Daher wird schließlich:

$$\frac{Q_l}{Q_m - d Q_{m-1}} = \sum_{k_1} \dots \sum_{k_m} \prod_{\mu} \binom{k_{\mu} + k_{\mu+1}}{k_{\mu+1}} \prod_{\nu} \binom{k_{\nu} + k_{\nu+1} - 1}{k_{\nu+1}} \binom{2k - k_1 - k_m + m - l - 1}{k_m} \cdot (p_1 p_2)^k \left(1 - \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2}\right)^{k_m} s^{2k}, \text{ wenn wir } \sum_{i=1}^m k_i = k \text{ setzen.}$$

5. Mittlere Dauer der Wanderung.

Die erzeugende Funktion für das Erreichen der Schranke 0 oder k ist entweder $A_z(s) + \overline{A}_z(s)$ bzw. $B_z(s) + \overline{B}_z(s)$. Die mittlere Dauer der Wanderung ist im ersten Fall $A'_z(1) + \overline{A}'_z(1)$, im zweiten $B'_z(1) + \overline{B}'_z(1)$. Diese mittlere Dauer läßt sich aber auch auf direktem Weg ermitteln, indem man die bei unabhängigen Schritten als Ausgangspunkt dienende inhomogene Differenzengleichung² in analoger Weise zu einem System von 2 Differenzengleichungen erweitert, wie dies in 2. geschehen ist.

² Feller, S. 286.

Über die Herstellung achsialer Lagen von kollinearen Räumen bei Zugrundelegung einer elliptischen Metrik.

Von

Ludwig Hofmann, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingelangt am 1. März 1954).

In seiner Arbeit „Kongruente Verlagerung kollinearer Räume in achsiale Lage“ (Mh. f. Math. 57 (1953), 75—87) hat *H. Brauner* über Anregung *W. Wunderlichs* die Frage nach der Herstellbarkeit achsialer Lagen von kollinearen räumlichen Systemen untersucht. Entgegen der aus einer Konstantenzählung sich ergebenden Vermutung, daß die Herstellung der achsialen Lage stets möglich sei, ergaben die Untersuchungen *Brauners*, daß sich zwei kollineare räumliche Systeme nur beim Bestehen einer in der genannten Arbeit abgeleiteten Bedingung in achsiale Lage bringen lassen, diese aber dann auf unendlich viele Arten möglich ist.

Es erschien mir nun verlockend, nach dem entsprechenden Sachverhalt bei Zugrundelegung einer nichteuklidischen Metrik zu fragen, wäre es doch denkbar, daß bei einer solchen, der euklidischen gegenüber viel allgemeineren Metrik die Herstellbarkeit der achsialen Lage stets möglich sei.

Es zeigt sich nun aber, daß auch im Falle einer nichteuklidischen Metrik zwei kollineare Räume nur beim Bestehen einer — im übrigen recht einfach auszusprechenden — Bedingung durch starre Transformationen in achsiale Lage gebracht werden können und daß diese dann wieder auf unendlich viele Arten möglich ist.

Wir legen unseren Betrachtungen eine elliptische Metrik des Raumes zugrunde und bezeichnen ihre beliebig gewählte, nicht ausgeartete, nullteilige Maßfläche mit Φ . Ist dann eine beliebige reelle, nicht ausgeartete, achsiale Kollineation des Raumes gegeben, und sind e und f ihre reell getrennten oder konjugiert hochkomplexen Achsen, so gibt

es, wie leicht gezeigt werden kann, in jedem der zahlreichen Sonderfälle, die hier auftreten können, stets (mindestens) ein Paar reell getrennter Polgeraden u und v von Φ , die e und f schneiden (Abb. 1).

Sind E und F die Schnittpunkte der Geraden u bzw. mit den Achsen e und f , so bezeichnen wir mit U_1, U_2 jenes (stets reelle) Paar entspre-

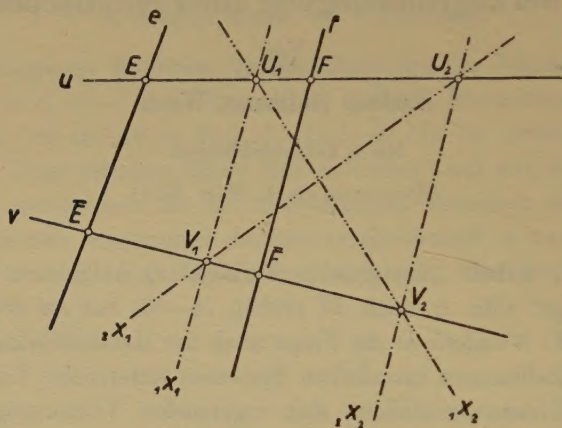


Abb. 1.

chender Punkte der orthogonalen Involution auf u , welches das Punktepaar E, F harmonisch trennt. In analoger Weise bezeichnen wir mit V_1, V_2 jenes Paar entsprechender Punkte der orthogonalen Involution auf v , welches die Schnittpunkte $\bar{E}$ und $\bar{F}$ dieser Geraden bzw. mit den Achsen e und f harmonisch trennt. Die Verbindungsgeraden ${}_1x_1$ von U_1 und V_1 und ${}_2x_2$ von U_2 und V_2 sind Polgeraden der Maßfläche Φ und trennen die Achsen e und f harmonisch und derselbe Tatbestand gilt für das Paar der Verbindungsgeraden ${}_1x_2$ von U_1 und V_2 und ${}_2x_1$ von U_2 und V_1 .

Die achsial-involutorischen Kollineationen des Raumes mit Paaren von Polgeraden der Maßfläche Φ als Achsen stellen Bewegungen im Sinne der betrachteten elliptischen Metrik dar und sollen als „Umwendungen“¹ bezeichnet werden.

Die oben betrachtete achsiale Kollineation mit den Achsen e und f führe das Raumsystem Σ über in das mit Σ kollokale Raumsystem Σ' .

¹ Streng davon zu unterscheiden sind die *Umlegungen* der elliptischen Metrik des Raumes, worunter man bekanntlich jene starren Transformationen versteht, die *keine* Bewegungen sind.

Wird nun Σ' durch die Umwendung mit dem Achsenpaar ${}_1x_1, {}_2x_2$ übergeführt in das Raumsystem Σ'' , so besteht, wie man leicht erkennt, zwischen Σ und Σ'' eine achsial-involutorische Kollineation.

In der Kollineation zwischen Σ und Σ'' wird nämlich die durch die Geraden $e, f, {}_1x_1, {}_2x_2$ bestimmte Regelschar 2. Grades projektiv und zwar wegen des involutorischen Entsprechens von e und f involutorisch in sich übergeführt. Da ferner die Geraden der Leitschar selbstentsprechend sind, so sind die Doppelstrahlen der obigen Involution punktweise selbstentsprechend. Die Verwandtschaft ist also tatsächlich eine achsiale Kollineation, und zwar eine involutorische.

Unterwirft man das Raumsystem Σ' der Umwendung mit dem Achsenpaar ${}_1x_2, {}_2x_1$, so ergibt sich ein völlig analoger Sachverhalt.

Jedes Paar achsial-kollinearer Raumsysteme kann also (und zwar mindestens auf zwei Arten) durch eine Umwendung und mithin durch eine Bewegung des einen der beiden Raumsysteme in ein Paar achsial-involutorischer Raumsysteme übergeführt werden. Umgekehrt kann daher auch jedes Paar achsial-kollinearer Raumsysteme (und zwar wieder mindestens auf zwei Arten) aus einem Paar achsial-involutorischer Systeme durch eine Umwendung des einen der beiden Raumsysteme erhalten werden. Die Umwendungsachsen gehören dabei mit den Achsen der achsial-involutorischen Systeme einer Regelschar 2. Grades an.

Lassen sich also zwei kollineare Raumsysteme überhaupt durch starre Transformationen in achsiale Lage bringen, so kann dies immer auf dem Wege über eine achsial-involutorische Lage der beiden Raumsysteme geschehen.

Es bestehe nun zwischen zwei kollokalen Raumsystemen Σ und Σ'' eine reelle, nicht ausgeartete, achsial-involutorische Kollineation mit den (reell getrennten oder konjugiert hochkomplexen) Achsen $\bar{e}$ und $\bar{f}$. Weiters sei p und q irgend ein Paar reeller Polargeraden der Maßfläche Φ , die mit $\bar{e}$ und $\bar{f}$ *geschart* sind. Zwischen dem Raumsystem Σ und dem Raumsystem Σ' , das sich aus Σ'' durch die Umwendung mit dem Achsenpaar p und q ergibt, besteht dann, wie man leicht erkennt, stets eine achsiale Kollineation. Ihre Achsen sind jenes Paar reell getrennter oder konjugiert hochkomplexer Geraden, das die Geradenpaare $\bar{e}, \bar{f}$ und p, q harmonisch trennt.

Es sei nun eine beliebige reelle, nicht ausgeartete räumliche Kollineation S gegeben. Sie führe das Raumsystem Σ über in das mit Σ kollokale Raumsystem Σ' . Der Maßfläche $\Phi = \Psi'$ der unseren Betrachtungen

zugrunde gelegten elliptischen Metrik entspreche als Σ angehörig in Σ' die Fläche Φ' und als Σ' angehörig in Σ die Fläche Ψ . Die Quadriken Ψ und Φ' bezeichnen wir als die Gegenflächen der kollinearen Raumsysteme Σ und Σ' .

Es sei weiters T eine starre Transformation, die das Raumsystem Σ' überführe in ein System Σ'' , das mit dem zu ihm kollinearen Raumsystem Σ in achsial-involutorischer Lage sich befinde. Da nun die Kollineation S die Gegenfläche Ψ von Σ in die Maßfläche Ψ' von Σ' , die starre Transformation T aber Ψ' von Σ' überführt in die Maßfläche $\Psi'' = \Phi$ von Σ'' , so führt die Kollineation $S.T$ die Gegenfläche Ψ von Σ über in die Maßfläche $\Psi'' = \Phi$ von Σ'' . Wegen des involutorischen Charakters von $S.T$ muß diese Kollineation nun aber auch die Maßfläche Φ von Σ überführen in die Fläche $\Psi = \Phi'$ von Σ' . Nun führt aber die Kollineation S die Maßfläche Φ von Σ über in die Gegenfläche Φ' von Σ' , so daß also die starre Transformation T die letztere Fläche überführen muß in die Gegenfläche Ψ von Σ .

Gibt es also eine starre Transformation T , die das Raumsystem Σ' überführt in ein System Σ'' , das mit dem zu ihm kollinearen Raumsystem Σ in achsial-involutorischer Lage sich befindet, so sind die Gegenflächen Ψ und Φ' der kollinearen Raumsysteme Σ und Σ' kongruent und die Transformation T führt Φ' über in Ψ . Da nun aber, wie wir gesehen haben, alle achsialen Lagen der beiden kollinearen Raumsysteme Σ und Σ' auf dem Wege über achsial-involutorische Lagen erhalten werden können, *so können die beiden Raumsysteme Σ und Σ' nur dann in achsiale Lage gebracht werden, wenn die beiden Gegenflächen kongruent sind.*

Ist die letztere Bedingung erfüllt, so haben wir nach allen jenen starren Transformationen zu fragen, die die Gegenflächen ineinander überführen und unter ihnen jene auszuwählen, die eine achsial-involutorische Lage der beiden kollinearen Raumsysteme Σ und Σ' herstellen.

Wir gehen wieder von den beiden kollinearen kollokalen Raumsystemen Σ und Σ' aus und betrachten zunächst den Fall, daß die Gegenfläche Ψ von Σ mit der Maßfläche Φ nur ein Poltetraeder $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$, gemein habe. Dieses stellt dann das Hauptpoltetraeder von Ψ (in der zugrundeliegenden elliptischen Metrik natürlich) dar und ihm entspricht in der Kollineation zwischen Σ und Σ' als das einzige gemeinsame Poltetraeder der Gegenfläche Φ' und der Maßfläche $\Psi' = \Phi$ das Hauptpoltetraeder $0'_1, 0'_2, 0'_3, 0'_4$ von Φ' .

Wir beziehen nun die Maßfläche $\Phi = \Psi'$ als dem Raumsystem Σ angehörend auf das Poltetraeder $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ und erteilen ihr durch geeignete Wahl des Einheitspunktes des Koordinatensystemes die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0. \quad (1)$$

Weiters beziehen wir die Maßfläche als dem Raumsystem Σ' angehörend auf das Poltetraeder $0'_1, 0'_2, 0'_3, 0'_4$ und erteilen ihr die Gleichung

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0. \quad (2)$$

Die Wahl der Einheitspunkte der Koordinatensysteme kann in jedem der beiden Fälle auf acht verschiedene Arten erfolgen.

Bei der getroffenen Wahl der Koordinatensysteme wird die gegebene Kollineation zwischen Σ und Σ' dargestellt durch eine Transformation von der Form

$$\varrho x_1' = a_1 x_1; \quad \varrho x_2' = a_2 x_2; \quad \varrho x_3' = a_3 x_3; \quad \varrho x_4' = a_4 x_4, \quad (3)$$

wobei die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 als positiv vorausgesetzt werden können.

Die Gegenfläche Ψ von Σ ist somit gegeben durch

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 + a_4^2 x_4^2 = 0 \quad (4)$$

und die Gegenfläche Φ' von Σ' durch

$$\frac{x_1'^2}{a_1^2} + \frac{x_2'^2}{a_2^2} + \frac{x_3'^2}{a_3^2} + \frac{x_4'^2}{a_4^2} = 0 \quad (5)$$

Unserer Voraussetzung über die Gegenflächen entsprechend sind die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 paarweise verschieden. Die beiden Gegenflächen sind nun, wie man sehr leicht erkennt, dann und nur dann kongruent, wenn die Bedingung

$$a_1 \cdot a_2 = a_3 \cdot a_4 \quad (6)$$

oder eine der beiden dazu analogen besteht.

Bleiben wir bei (6), so erhält die Gleichung von Φ' durch Multiplikation von (5) mit $a_1^2 a_2^2 = a_3^2 a_4^2$ die Form

$$a_2^2 x_1'^2 + a_1^2 x_2'^2 + a_4^2 x_3'^2 + a_3^2 x_4'^2 = 0, \quad (7)$$

aus welcher man die Kongruenz von Φ' und Ψ unmittelbar erkennt.

Es gibt nun acht starre Transformationen, die die Gegenfläche Φ' überführen in die Gegenfläche Ψ . Geht dabei das Raumsystem Σ über in das Raumsystem Σ'' und bezeichnen wir die Koordinaten eines Punktes von Σ'' in bezug auf das in Σ festgelegte Koordinatensystem

$0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ mit $x_1'', x_2'', x_3'', x_4''$, so werden diese acht Transformationen dargestellt durch

$$\varrho x_1'' = \pm x_2'; \quad \varrho x_2'' = \pm x_1'; \quad \varrho x_3'' = \pm x_4'; \quad \varrho x_4'' = \pm x_3', \quad (8)$$

wobei alle Vorzeichenkombinationen zulässig sind.

Die entsprechenden Kollineationen zwischen den Raumsystemen Σ und Σ'' werden wegen (3) dargestellt durch die Transformationen

$$\varrho x_1'' = \pm a_2 x_2; \quad \varrho x_2'' = \pm a_1 x_1; \quad \varrho x_3'' = \pm a_4 x_4; \quad \varrho x_4'' = \pm a_3 x_3 \quad (9)$$

Von diesen acht Kollineationen sind, wie sich unter Berücksichtigung von (6) unmittelbar ergibt, nur die folgenden vier involutorisch:

$$\begin{aligned} \varrho x_1'' &= +a_2 x_2; \quad \varrho x_2'' = +a_1 x_1; \quad \varrho x_3'' = +a_4 x_4; \quad \varrho x_4'' = +a_3 x_3 \\ \varrho x_1'' &= +a_2 x_2; \quad \varrho x_2'' = +a_1 x_1; \quad \varrho x_3'' = -a_4 x_4; \quad \varrho x_4'' = -a_3 x_3 \\ \varrho x_1'' &= +a_2 x_2; \quad \varrho x_2'' = -a_1 x_1; \quad \varrho x_3'' = +a_4 x_4; \quad \varrho x_4'' = -a_3 x_3 \\ \varrho x_1'' &= +a_2 x_2; \quad \varrho x_2'' = -a_1 x_1; \quad \varrho x_3'' = -a_4 x_4; \quad \varrho x_4'' = +a_3 x_3 \end{aligned} \quad (10)$$

Da nun weiters für jede dieser vier Kollineationen die Gegenkanten $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ des Fundamentaltetraeders ein Paar windschiefer, nicht punktweise selbstentsprechender Geraden darstellen, so sind in jedem der vier Fälle die beiden Raumsysteme Σ und Σ'' *achsial*-involutorisch.

Übrigens können, wie man leicht einsieht, aus jeder der vier gegenseitigen Lagen der beiden Raumsysteme Σ und Σ'' die drei weiteren erhalten werden, wenn man das System Σ'' (oder das System Σ) den drei Umwendungen mit den Paaren von Gegenkanten des Tetraeders $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ als Achsen unterwirft.

Unsere bisherigen Ergebnisse zusammenfassend können wir also folgendes sagen.

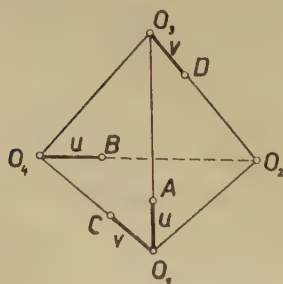


Abb. 2.

Satz I: *Besitzen die Gegenflächen zweier kollokalen, kollinearen räumlichen Systeme nur je ein Hauptpoltetraeder, so lassen sich die beiden Systeme dann und nur dann durch starre Transformationen des einen von ihnen in achsiale Lage bringen, wenn die Gegenflächen kongruent sind.*

Die Bedingung (6) beinhaltet nun eine bemerkenswerte metrische Sonderheit (in bezug auf die zugrunde gelegte elliptische

Metrik natürlich) der beiden Gegenflächen.

Bezeichnen wir (Abb. 2) einen der beiden auf der Hauptachse $0_1 0_3$ der Gegenfläche Ψ liegenden Scheitel dieser Fläche mit A (in der Figur

durch einen reellen Punkt symbolisiert), sind ferner J und K die Schnittpunkte der Geraden $0_1 0_3$ mit der Maßfläche, so ergibt sich durch eine einfache Rechnung für das Doppelverhältnis $(0_1, A, J, K)$ der Wert

$$\frac{1 + a_1/a_3}{1 - a_1/a_3}.$$

Ist weiters B einer der beiden der Hauptachse $0_2 0_4$ angehörenden Scheitel von Ψ und sind L und M die Schnittpunkte der Geraden $0_2 0_4$ mit der Maßfläche, so ergibt sich $(0_4, B, L, M) = \frac{1 + a_4/a_2}{1 - a_4/a_2}$. Da nun wegen (6) $\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_4}{a_2}$ ist, so folgt daraus die Gleichheit der Halbachsen $\overline{0_1 A}$ und $\overline{0_4 B}$ der Gegenfläche Ψ .

Stellen weiters die Punkte C und D bzw. je einen der Scheitel von Ψ auf den Hauptachsen $0_1 0_4$ und $0_2 0_3$ dar, so ergibt sich in völlig analoger Weise die Gleichheit der beiden Halbachsen $\overline{0_1 C}$ und $\overline{0_3 D}$.

Die Gegenfläche Ψ (und ebenso die Gegenfläche Φ') weist also die in Abb. 2 dargestellte metrische Sonderheit auf, wobei die Scheitel von Ψ durch reelle Punkte symbolisiert und gleichlange Halbachsen mit denselben Buchstaben (u bzw. v) bezeichnet wurden.

Weist umgekehrt eine der beiden Gegenflächen die in Abb. 2 dargestellte metrische Sonderheit auf, so besteht die Bedingung (6) und die beiden Gegenflächen sind kongruent. Es gilt somit der

Satz II: *Besitzen die Gegenflächen zweier kollokalen, kollinearen Raumsysteme nur je ein Hauptpoltetraeder, so sind die beiden Flächen dann und nur dann kongruent, wenn eine von ihnen und damit auch die andere, die in Abb. 2 dargestellte metrische Sonderheit aufweist.*

Aus jeder der vier durch (10) gegebenen achsial-involutorischen Kollineationen zwischen den beiden Raumsystemen Σ und Σ'' kann man nun ∞^1 weitere achsiale Lagen der beiden kollinearen Raumsysteme erhalten, indem man auf Σ'' die Umwendungen mit Achsenpaaren p und q ausübt, die mit den Achsen e und f der betrachteten achsial-involutorischen Kollineation geschart sind.

Wir betrachten zunächst die erste der durch (10) gegebenen achsial-involutorischen Kollineationen zwischen den Raumsystemen Σ und Σ''

$$\varrho x_1'' = a_2 x_2; \quad \varrho x_2'' = a_1 x_1; \quad \varrho x_3'' = a_4 x_4; \quad \varrho x_4'' = a_3 x_3.$$

Ihre Achsen e und f schneiden die Gerade $0_1 0_2$ bzw. in den Punkten

$E: x_1 = +\sqrt{a_2}, x_2 = +\sqrt{a_1}, x_3 = 0, x_4 = 0$ und

$F: x_1 = +\sqrt{a_2}, x_2 = -\sqrt{a_1}, x_3 = 0, x_4 = 0$ und die Gerade $0_3 0_4$ bzw. in den Punkten

$\bar{E}: x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = +\sqrt{a_4}, x_4 = +\sqrt{a_3}$ und

$\bar{F}: x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = +\sqrt{a_4}, x_4 = -\sqrt{a_3}.$

Die Geraden $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ stellen, wie man leicht einsieht, das einzige Paar von Polargeraden der Maßfläche Φ dar, die die Geraden e und f schneiden.

Die Umwendungsachsen p und q sind demnach durch jene Paare von Polargeraden von Φ gegeben, welche die Geraden $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ schneiden und mit e und f geschart sind.

Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden p mit den Geraden $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ beziehungsweise mit $P(x_1, x_2, 0, 0)$ und $\bar{P}(0, 0, x_3, x_4)$, so ergeben sich aus (1) für die Schnittpunkte Q und $\bar{Q}$ von q bzw. mit $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ die Koordinaten $Q(x_2, -x_1, 0, 0)$ und $\bar{Q}(0, 0, x_4, -x_3)$. Die Gleichung der Regelfläche Ω , die von sämtlichen Umwendungsachsen gebildet wird, ergibt sich nun aus der Doppelverhältnisleichheit

$$(P, Q, E, F) = (\bar{P}, \bar{Q}, \bar{E}, \bar{F}).$$

Es ist also

$$\frac{\left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \sqrt{a_2} & \sqrt{a_1} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} x_2 & -x_1 \\ \sqrt{a_2} & \sqrt{a_1} \end{array} \right|} : \frac{\left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \sqrt{a_2} & -\sqrt{a_1} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} x_2 & -x_1 \\ \sqrt{a_2} & -\sqrt{a_1} \end{array} \right|}} = \frac{\left| \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \\ \sqrt{a_4} & \sqrt{a_3} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} x_4 & -x_3 \\ \sqrt{a_4} & \sqrt{a_3} \end{array} \right|} : \frac{\left| \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \\ \sqrt{a_4} & -\sqrt{a_3} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} x_4 & -x_3 \\ \sqrt{a_4} & -\sqrt{a_3} \end{array} \right|},$$

woraus sich durch eine einfache Umformung

$$(a_1 + a_2) x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2) = (a_3 + a_4) x_3 x_4 (x_1^2 + x_2^2) \quad (11)$$

als Gleichung von Ω ergibt.

Die Regelfläche Ω ist also vom vierten Grad und, da die Tetraederkanten $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ doppelte Leitlinien sind, nach der *Sturm'schen* Einteilung von der I. Art.

Die übrigen vier Kanten des Tetraeders $0_1 0_2 0_3 0_4$ sind Erzeugende von Ω .

Durch die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} q x_1 &= y_1 + y_2, & q x_2 &= y_1 - y_2 \\ q x_3 &= y_3 + y_4, & q x_4 &= y_3 - y_4 \end{aligned}$$

geht die Gleichung von Ω über in

$$(y_1^2 - y_2^2) \cdot (y_3^2 + y_4^2) = A (y_1^2 + y_2^2) \cdot (y_3^2 - y_4^2) \quad (12)$$

wobei $\frac{a_3 + a_4}{a_1 + a_2} = A$ gesetzt wurde. Wegen (6) und der paarweisen Verschiedenheit der a_i ist $A \neq 1$.

Das Fundamentaltetraeder des neuen Koordinatensystems ist wieder ein Poltetraeder der Maßfläche Φ und die Regelfläche Ω ist symmetrisch in bezug auf seine vier Seitenflächen. Diese werden gebildet von jenem Paar von Normalebenen, die durch die Punkte 0_1 und 0_2 hindurchgehen und die Punkte 0_3 und 0_4 harmonisch trennen und jenem weiteren Paar von Normalebenen, die durch die Punkte 0_3 und 0_4 hindurchgehen und die Punkte 0_1 und 0_2 harmonisch trennen.

Setzt man $\frac{y_1}{y_2} = y$ und $\frac{y_3}{y_4} = z$, so ergibt sich aus (12) die Beziehung

$$\frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} = A \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$$

aus der man erkennt, daß die durch die Erzeugenden von Ω auf den Doppelgeraden dieser Fläche hervorgerufene (2,2)-Korrespondenz die Punktpaare der Involution $y' = -y$ auf der Doppelgeraden $0_1 0_2$ projektiv transformiert in die Punktpaare der Involution $z' = -z$ auf der Doppelgeraden $0_3 0_4$.

Betrachten wir nunmehr die achsial-involutorische Kollineation zwischen den Raumsystemen Σ und Σ'' , die sich aus der Transformation

$$\varrho x_1'' = a_2 x_2; \quad \varrho x_2'' = a_1 x_1; \quad \varrho x_3'' = -a_4 x_4; \quad \varrho x_4'' = -a_3 x_3 \quad (13)$$

ergibt, so sind die Doppelpunkte der Involution entsprechender Punkte auf den Geraden $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ dieselben wie früher, nämlich beziehungsweise E, F und $\bar{E}, \bar{F}$. Die Achsen der Kollineation sind jetzt aber, wie sich aus (13) unmittelbar ergibt, die Verbindungsgeraden $\bar{e}$ von E und $\bar{F}$ und $\bar{f}$ von F und $\bar{E}$.

Man zeigt nun sehr leicht, daß die aus der vorliegenden achsial-involutorischen Kollineation durch die Ausführung von Umwendungen auf das Raumsystem Σ'' sich ergebenden achsialen Lagen der beiden Raumsysteme dieselben sind, wie die aus der vorhin betrachteten involutorischen Kollineation hervorgehenden. Es entspricht dies der Tatsache, daß jede achsiale Lage der beiden Raumsysteme aus zwei

verschiedenen achsial-involutorischen Lagen durch Umwendungen des einen der beiden Raumsysteme erzeugt werden kann.

Die Fläche der Umwendungsachsen ist in dem eben betrachteten Falle gegeben durch

$$(a_1 + a_2) x_1 x_2 (x_3^2 + x_4^2) = -(a_3 + a_4) x_3 x_4 (x_1^2 + x_2^2)$$

Sie ist also mit der Fläche Ω spiegelgleich und geht aus ihr durch jede der vier Spiegelungen an den Seitenflächen des Tetraeders $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ hervor.

Ziehen wir nun die beiden achsial-involutorischen Kollineationen

$$\begin{aligned} \varrho x_1'' &= a_2 x_2; & \varrho x_2'' &= -a_1 x_1; & \varrho x_3'' &= a_4 x_4; & \varrho x_4'' &= -a_3 x_3 \\ \varrho x_1'' &= a_2 x_2; & \varrho x_2'' &= -a_1 x_1; & \varrho x_3'' &= -a_4 x_4; & \varrho x_4'' &= a_3 x_3 \end{aligned}$$

in Betracht, so ergibt sich ein dem eben erörterten völlig analoger Sachverhalt. Die Achsen der beiden erzeugenden achsial-involutorischen Kollineationen sind hier konjugiert hochkomplex.

Es ergibt sich demnach der folgende

Satz III: *Besitzen die Gegenflächen zweier kollinearer Raumsysteme nur je ein Hauptpoltetraeder und lassen sich die beiden Raumsysteme durch starre Transformationen in achsiale Lage bringen, so gibt es bei Festhalten des einen der beiden Raumsysteme für das andere zwei Mannigfaltigkeiten von je ∞^1 Lagen, für welche die beiden Raumsysteme in achsialer Lage sich befinden.*

Es sollen wieder zwei kollineare kollokale Raumsysteme Σ und Σ' gegeben sein, wobei der Maßfläche $\Phi = \Psi'$ die Quadriken Φ' und Ψ als Gegenflächen entsprechen mögen.

Wir setzen nun voraus, daß Ψ und Φ' einfache Drehflächen sind und bezeichnen mit $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ ein beliebiges der ∞^1 gemeinsamen Poltetraeder von Φ und Ψ und mit $0_1', 0_2', 0_3', 0_4'$ das ihm in der gegebenen Kollineation entsprechende gemeinsame Poltetraeder von Φ' und Ψ' . Die Kanten $0_1 0_2$ und $0_1' 0_2'$ sollen dabei bzw. die Drehachsen der Gegenflächen Ψ und Φ' darstellen.

Wir beziehen die Maßfläche, als dem System Σ angehörig, auf das Poltetraeder $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ und erteilen ihr die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

und beziehen sie, als dem System Σ' angehörig, auf das Poltetraeder $0_1', 0_2', 0_3', 0_4'$ und erteilen ihr die Gleichung

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0$$

Die Kollineation zwischen den Raumsystemen Σ und Σ' wird dargestellt durch eine Transformation von der Form

$$\varrho x_1' = a_1 x_1; \quad \varrho x_2' = a_2 x_2; \quad \varrho x_3' = a_3 x_3; \quad \varrho x_4' = a_4 x_4 \quad (14)$$

wobei die Koeffizienten a als positiv vorausgesetzt werden können.

Die Gegenfläche Ψ von Σ ist gegeben durch

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 + a_4^2 x_4^2 = 0$$

und die Gegenfläche Φ' von Σ' durch

$$\frac{x_1'^2}{a_1^2} + \frac{x_2'^2}{a_2^2} + \frac{x_3'^2}{a_3^2} + \frac{x_4'^2}{a_4^2} = 0$$

Wegen der bezüglich der Gegenflächen geltenden Voraussetzung muß $a_3 = a_4$ und $a_1 \neq a_2, a_1 \neq a_3, a_2 \neq a_3$ sein.

Die beiden Gegenflächen sind nun, wie man leicht erkennt, dann und nur dann kongruent, wenn

$$a_1 \cdot a_2 = a_3^2 \quad (15)$$

ist.

Wir können dem entsprechend $a_3 = a_4 = 1, a_1 = a$ und $a_2 = 1/a$ setzen, wobei $a \neq 1$ vorausgesetzt wird. Die Transformation (14) erhält dann die Form

$$\varrho x_1' = a x_1; \quad \varrho x_2' = \frac{1}{a} x_2; \quad \varrho x_3' = x_3; \quad \varrho x_4' = x_4 \quad (16)$$

und die Gleichungen von Ψ und Φ' werden bzw.

$$a^2 x_1^2 + \frac{x_2^2}{a^2} + x_3^2 + x_4^2 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x_1'^2}{a^2} + a^2 x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0.$$

Die starren Transformationen nun, die die Gegenfläche Φ' überführen in die Gegenfläche Ψ , müssen einerseits die (auf $0_1' 0_2'$ liegenden) Scheitel $A'(a, i/a, 0, 0)$ und $B'(a, -i/a, 0, 0)$ von Φ' überführen in die (auf $0_1 0_2$ liegenden) Scheitel $A(1/a, ia, 0, 0)$ und $B(1/a, -ia, 0, 0)$ von Ψ . Es kann dabei A' in A und B' in B , oder umgekehrt A' in B und B' in A übergeführt werden.

Andererseits müssen die genannten Transformationen die auf der Geraden $0_3' 0_4'$ liegenden Berührungspunkte $J'(0, 0, 1, i)$ und $K'(0, 0, 1, -i)$ von Φ' mit der Maßfläche $\Psi' = \Phi$ überführen in die auf der Geraden $0_3 0_4$ liegenden Berührungspunkte $J(0, 0, 1, i)$ und $K(0, 0, 1, -i)$ von Ψ mit Φ . Es kann dabei wieder J' in J und K' in K , oder J' in K und K' in J übergeführt werden.

Bezeichnen wir wieder ein aus dem Raumsystem Σ' durch eine starre Transformation der obigen Art hervorgehendes Raumsystem mit Σ'' , bezeichnen wir weiters die Koordination eines Punktes P'' von Σ'' in bezug auf das in Σ bereits festgelegte Koordinatensystem $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ mit $x_1'', x_2'', x_3'', x_4''$, so sind diese Transformationen nach dem oben gesagten gegeben durch

$$\begin{aligned} \varrho x_1'' &= x_2'; & \varrho x_2'' &= \pm x_1'; & \varrho x_3'' &= x_3' \cos \varphi - x_4' \sin \varphi; \\ & & & & \varrho x_4'' &= \pm (x_3' \sin \varphi + x_4' \cos \varphi). \end{aligned}$$

Die entsprechenden Kollineationen zwischen den Raumsystemen Σ und Σ'' werden dann wegen (15) dargestellt durch

$$\begin{aligned} \varrho x_1'' &= x_2/a; & \varrho x_2'' &= \pm a x_1; & \varrho x_3'' &= x_3 \cos \varphi - x_4 \sin \varphi; \\ & & & & \varrho x_4'' &= \pm (x_3 \sin \varphi + x_4 \cos \varphi). \end{aligned}$$

Von diesen Kollineationen sind nun, wie man sich leicht überzeugt, die folgenden involutorisch

$$\begin{aligned} \varrho x_1'' &= x_2/a; & \varrho x_2'' &= a x_1; & \varrho x_3'' &= x_3 \cos \varphi - x_4 \sin \varphi; \\ & & & & \varrho x_4'' &= -(x_3 \sin \varphi + x_4 \cos \varphi) \end{aligned} \quad (17)$$

für jeden Wert von φ , weiters die beiden Kollineationen

$$\begin{aligned} \varrho x_1'' &= x_2/a; & \varrho x_2'' &= -a x_1; & \varrho x_3'' &= x_4; & \varrho x_4'' &= -x_3. \\ \varrho x_1'' &= x_2/a; & \varrho x_2'' &= -a x_1; & \varrho x_3'' &= -x_4; & \varrho x_4'' &= x_3. \end{aligned} \quad (18)$$

und schließlich die beiden Kollineationen

$$\begin{aligned} \varrho x_1'' &= x_2/a; & \varrho x_2'' &= a x_1; & \varrho x_3'' &= x_3; & \varrho x_4'' &= x_4 \\ \varrho x_1'' &= x_2/a; & \varrho x_2'' &= a x_1; & \varrho x_3'' &= -x_3; & \varrho x_4'' &= -x_4. \end{aligned} \quad (19)$$

Die Kollineationen (17) entsprechen der Zuordnung $A' \rightarrow B, B' \rightarrow A, J' \rightarrow K, K' \rightarrow J$ und die ∞^1 verschiedenen Lagen des Raumsystems Σ'' ergeben sich aus einer beliebigen von ihnen durch die Drehungen um die Achse $0_1 0_2$ von $\mathcal{V}$. Die Kollineationen (18) ergeben sich aus der Zuordnung $A' \rightarrow A, B' \rightarrow B, J' \rightarrow J, K' \rightarrow K$ und schließlich die Kollineationen (19) aus der Zuordnung $A' \rightarrow B, B' \rightarrow A, J' \rightarrow J, K' \rightarrow K$.

Die Kollineationen (17) und (18) sind nun auch *achsial*-involutorisch, da für sie $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ ein Paar windschiefer, nicht punktweise selbstentsprechender Geraden darstellt.

Die Kollineationen (19) hingegen sind zentrisch, und zwar ist im ersten Falle das Kollineationszentrum S gegeben durch $S(1, -a, 0, 0)$ und die Kollineationsebene durch $ax_1 - x_2 = 0$ und im zweiten Falle

das Kollineationszentrum $\bar{S}$ durch $\bar{S}(1, a, 0, 0)$ und die Kollineations-ebene durch $ax_1 + x_2 = 0$.

Aus jeder der achsial-involutorischen Kollineationen (17) und (18) ergeben sich durch Ausübung von Umwendungen auf das Raumsystem $\Sigma'' \propto^1$ weitere achsiale Lagen der beiden gegebenen kollinearen Raumsysteme.

Es gilt somit der

Satz IV: *Sind die Gegenflächen zweier kollokalen, kollinearen Raumsysteme einfache Drehflächen, so lassen sich die beiden Raumsysteme dann und nur dann durch starre Transformationen in achsiale Lage bringen, wenn die beiden Gegenflächen kongruent sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es bei Festhalten des einen der beiden Systeme für das andere ∞^2 verschiedene Lagen, für welche die beiden Systeme in achsialer Lage sich befinden.*

Die Bedingung (15) beinhaltet wieder eine metrische Sonderheit der Gegenflächen, die in Abb. 3 schematisch dargestellt ist. Es stellt dabei O_1, O_2, O_3, O_4 ein beliebiges Hauptpoltetraeder der Fläche und $O_1 O_2$ ihre Drehachse dar. Die Erdpunkte der Äquatordurchmesser $\overline{O_1 O_3}$, $\overline{O_1 O_4}$, und $\overline{O_2 O_3}, \overline{O_2 O_4}$ wurden zum Teil durch reelle Punkte symbolisiert und gleichlange Halbachsen mit denselben Buchstaben bezeichnet.

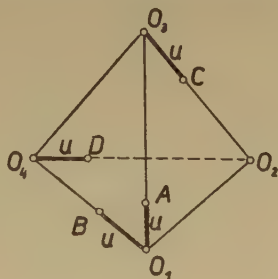


Abb. 3.

Es sollen wieder zwei kollineare, kollokale Raumsysteme Σ und Σ' gegeben sein, wobei der Maßfläche $\Phi = \Psi'$ die Quadriken Φ und Ψ als Gegenfläche entsprechen mögen.

Wir betrachten nun den Fall, daß Ψ und Φ' Drehflächen in zweifachem Sinne, also Clifford'sche Flächen, in bezug auf die zugrunde liegende Metrik sind. Es sei wieder O_1, O_2, O_3, O_4 ein beliebiges der ∞^2 gemeinsamen Poltetraeder von Φ und Ψ und O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 das ihm in der gegebenen Kollineation entsprechende gemeinsame Poltetraeder von Ψ' und Φ' . Die Kanten $O_1 O_2; O_3 O_4$ und $O'_1 O'_2; O'_3 O'_4$ sollen dabei bzw. die Drehachsen von Ψ und Φ' darstellen.

Wir beziehen die Maßfläche als dem System Σ angehörend auf das Poltetraeder O_1, O_2, O_3, O_4 und erteilen ihr die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Desgleichen beziehen wir sie als dem System Σ' angehörend auf das Poltetraeder $0_1', 0_2', 0_3', 0_4'$ und erteilen ihr die Gleichung

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0.$$

Die gegebene Kollineation wird dargestellt durch eine Transformation von der Form

$$\varrho x_1' = a_1 x_1; \varrho x_2' = a_2 x_2; \varrho x_3' = a_3 x_3; \varrho x_4' = a_4 x_4,$$

wobei die Koeffizienten a_i als positiv vorausgesetzt werden. Die Gegenfläche Ψ von Σ ist gegeben durch

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 + a_4^2 x_4^2 = 0$$

und die Gegenfläche Φ' von Σ' durch

$$\frac{x_1'^2}{a_1^2} + \frac{x_2'^2}{a_2^2} + \frac{x_3'^2}{a_3^2} + \frac{x_4'^2}{a_4^2} = 0.$$

Entsprechend unserer Annahme über die Gegenflächen setzen wir $a_1 = a_2 = 1$ und $a_3 = a_4 = a$, wobei $a \neq 1$ vorausgesetzt wird. Die Gleichungen von Ψ und Φ' sind dann bzw.

$$x_1^2 + x_2^2 + a^2 (x_3^2 + x_4^2) = 0 \text{ und } a^2 (x_1'^2 + x_2'^2) + x_3'^2 + x_4'^2 = 0,$$

woraus sich ergibt, daß diese beiden Flächen kongruent sind.

Den Achsen $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ von Ψ entsprechen dabei bzw. die Achse $0_3' 0_4'$ und $0_1' 0_2'$ von Φ' . Die gegebene Kollineation zwischen Σ und Σ' wird dargestellt durch

$$\begin{aligned} \varrho x_1' &= x_1; & \varrho x_2' &= x_2; \\ \varrho x_3' &= a x_3; & \varrho x_4' &= a x_4. \end{aligned} \quad (20)$$

Die auf $0_1 0_2$ liegenden Berührungspunkte J und K (Abb. 4) der Gegenfläche Ψ mit der Maßfläche sind gegeben durch $J(1, i, 0, 0)$ und

$K(1, -i, 0, 0)$ und die auf $0_3 0_4$ liegenden Berührungspunkte L und M dieser beiden Flächen durch $L(0, 0, 1, i)$ und $M(0, 0, 1, -i)$. Die den

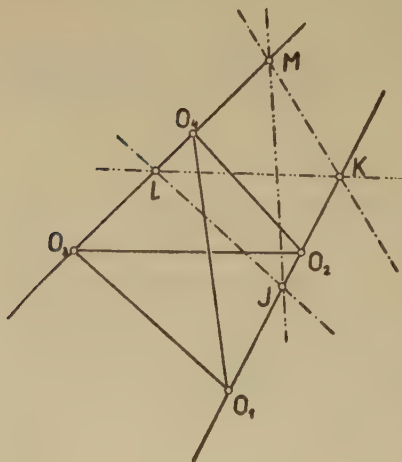


Abb. 4.

Punkten J und K in der gegebenen Kollineation bzw. entsprechenden Berührungspunkte der Gegenfläche Φ' mit der Maßfläche liegen auf $0_1' 0_2'$ und sind $J' (1, i, 0, 0)$ und $K' (1, -i, 0, 0)$ und die den Punkten L und M bzw. entsprechenden Berührungspunkte dieser beiden Flächen liegen auf $0_3' 0_4'$ und sind $L' (0, 0, 1, i)$ und $M' (0, 0, 1, -i)$. Die starren Transformationen nun, die die Gegenfläche Φ' überführen in die Gegenfläche Ψ , führen die Punktepaare J', K' und L', M' bzw. über in die Punktepaare L, M und J, K , so daß es also vier verschiedene Möglichkeiten der Zuordnung gibt.

Da nun die Fläche Ψ durch die ∞^2 elliptischen Schraubungen mit den Achsen $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ in sich selbst transformiert wird, gibt es zu jeder der vier oben erwähnten Zuordnungen ∞^2 starre Transformationen des Raumsystemes Σ' in ein System Σ'' , für welche die Gegenfläche Φ' übergeht in die Gegenfläche Ψ .

Wir bezeichnen die Koordinaten eines Punktes P'' von Σ'' in bezug auf das in Σ bereits festgelegte Koordinatensystem $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ mit $x_1'', x_2'', x_3'', x_4''$.

Treffen wir die Zuordnung $J' \rightarrow L, K' \rightarrow M, L' \rightarrow J, M' \rightarrow K$, so führen die daraus sich ergebenden ∞^2 starren Transformationen zwischen den Raumsystemen Σ' und Σ'' , die Φ' überführen in Ψ zu ∞^2 kollinearen Transformationen zwischen den Raumsystemen Σ und Σ'' , die wegen (20) durch die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} \varrho x_1'' &= a [x_3 \cos (\varphi + \psi) - x_4 \sin (\varphi + \psi)] \\ \varrho x_2'' &= a [x_3 \sin (\varphi + \psi) + x_4 \cos (\varphi + \psi)] \\ \varrho x_3'' &= x_1 \cos (\varphi - \psi) - x_2 \sin (\varphi - \psi) \\ \varrho x_4'' &= x_1 \sin (\varphi - \psi) + x_2 \cos (\varphi - \psi) \end{aligned} \quad (21)$$

mit $0 \leq \varphi < \pi$ und $0 \leq \psi < \pi$ dargestellt werden. Die Schraubungen mit den Achsen $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ wurden dabei durch die Schiebungen längs des gemeinsamen Erzeugendenpaares J, L und K, M der Gegenfläche Ψ und der Maßfläche Φ und durch jene längs des gemeinsamen Erzeugendenpaares J, M und K, L von Ψ und Φ dargestellt.

Von den ∞^2 Kollineationen (21) sind nun, wie man unmittelbar erkennt, die beiden zu $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ gehörenden Systeme von je ∞^1 Kollineationen involutorisch. Es ergibt sich für $\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \varrho x_1'' &= a [x_3 \cos \psi - x_4 \sin \psi], & \varrho x_3'' &= x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi \\ \varrho x_2'' &= a [x_3 \sin \psi + x_4 \cos \psi], & \varrho x_4'' &= -x_1 \sin \psi + x_2 \cos \psi \end{aligned} \quad (22)$$

und für $\varphi = \pi/2$

$$\begin{aligned} \varrho x_1'' &= -a [x_3 \sin \psi + x_4 \cos \psi], & \varrho x_3'' &= x_1 \sin \psi - x_2 \cos \psi \\ \varrho x_2'' &= a [x_3 \cos \psi - x_4 \sin \psi], & \varrho x_4'' &= x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi \end{aligned} \quad (23)$$

Die ∞^1 Kollineationen (22) ergeben sich aus einer beliebigen von ihnen, wenn man das Raumsystem Σ'' den Schiebungen längs des Erzeugendenpaares JL und KM unterwirft. Für die ∞^1 Kollineationen (23) gilt der analoge Sachverhalt. Die Kollineationen (22) und (23) sind nun *achsial*-involutorisch, da für sie die Geraden $0_1 0_2$ und $0_3 0_4$ ein Paar entsprechender windschiefer Geraden darstellen. Aus jeder dieser Kollineationen ergeben sich nun durch Umwendungen des Raumsystemes $\Sigma'' \infty^1$ weitere achsiale Kollineationen.

Für die Zuordnung $J' \rightarrow M, K' \rightarrow L, L' \rightarrow K, M' \rightarrow J$ ergibt sich nun ein völlig analoger Sachverhalt, während die beiden Zuordnungen $J' \rightarrow L, K' \rightarrow M, L' \rightarrow K, M' \rightarrow J$ und $J' \rightarrow M, K' \rightarrow L, L' \rightarrow J, M' \rightarrow K$ zu keinen involutorischen Kollineationen zwischen den Raumsystemen Σ und Σ'' führen.

Es gilt somit der

Satz V: *Sind die Gegenflächen zweier kollinear, kollokaler Räume Clifford'sche Flächen, so sind die letzteren stets kongruent und die beiden Raumsysteme können durch starre Transformationen in achsiale Lagen gebracht werden. Wird dabei eines der beiden Systeme festgehalten, so gibt es zwei Mannigfaltigkeiten von je ∞^2 solcher Lagen.*

Es sollen wieder zwei kollineare, kollokale Raumsysteme Σ und Σ' gegeben sein und wir betrachten nun den letzten der hier möglichen Fälle, daß nämlich die der Maßfläche $\Phi = \Psi'$ als Gegenflächen entsprechenden Quadriken Φ' und Ψ Sphären in bezug auf die zugrunde liegende elliptische Maßbestimmung sind.

Ist $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ ein beliebiges der ∞^3 gemeinsamen Poltetraeder von Φ und Ψ , wobei 0_1 den Mittelpunkt von Ψ darstellen möge, so entspricht ihm in der gegebenen Kollineation ein gemeinsames Poltetraeder $0'_1, 0'_2, 0'_3, 0'_4$ von Ψ' und Φ' , wobei $0'_1$ der Mittelpunkt von Φ' ist.

Beziehen wir die Maßfläche Φ als dem System Σ angehörend auf das Poltetraeder $0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ und wählen den Einheitspunkt des Koordinatensystemes so, daß die Gleichung von Φ die Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \quad (24)$$

erhält, so ist die Gleichung der Gegenfläche Ψ von der Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 x_4^2 = 0, \quad (25)$$

wobei $a^2 \neq 1$ ist.

Beziehen wir weiters die Maßfläche $\Psi' = \Phi$ als dem System Σ' angehörend auf das Poltetraeder $0_1', 0_2', 0_3', 0_4'$ und wählen den Einheitspunkt des Koordinatensystems so, daß die Gleichung von Ψ' die Form

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0$$

erhält, so wird wegen (25) die gegebene Kollineation dargestellt durch

$$\varrho x_1' = x_1; \quad \varrho x_2' = x_2; \quad \varrho x_3' = x_3; \quad \varrho x_4' = a x_4.$$

Die Gleichung der Gegenfläche Φ' ist dann aber wegen (24)

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + \frac{x_4'^2}{a^2} = 0. \quad (26)$$

Wären also die Gegenflächen Ψ und Φ' kongruent, so müßte wegen (25) und (26) $a^2 = 1/a^2$ und damit entgegen der Voraussetzung $a^2 = 1$ sein.

Es gilt somit der

Satz VI: *Sind die Gegenflächen zweier kollokaler, kollinearer Räume Sphären, so sind die letzteren nicht kongruent und die Raumsysteme können demnach nicht durch starre Transformationen in achsiale Lagen gebracht werden.*

Abschließend können wir also folgendes sagen:

Satz VII: *Zwei kollokale, kollineare Räume können bei Zugrundelegung einer elliptischen Metrik dann und nur dann durch starre Transformationen der Raumsysteme in achsiale Lagen gebracht werden, wenn die beiden Gegenflächen kongruent sind.*

Besitzen die beiden Gegenflächen nur je ein Hauptpoltetraeder, oder sind sie einfache Drehflächen, so sind sie dann und nur dann kongruent, wenn sie beziehungsweise die in den Figuren 2 und 3 dargestellten metrischen Sonderheiten aufweisen. Sind die Gegenflächen Clifford'sche Flächen, so sind sie stets kongruent und sind sie Sphären, so sind sie nicht kongruent.

Beispiel einer Strömung mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit.

Von

F. G. Tricomi, Turin.

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingelangt am 27. April 1954.)

1. Es ist heute ziemlich allgemein bekannt, daß die Gasdynamik — d. h. die Theorie der Strömung *kompresibler* Medien — falls die Strömungsgeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit erreicht — in engen Beziehungen mit einer, von mir schon 1920 untersuchten partiellen Differentialgleichung von *gemischtem* Typus steht¹. Es handelt sich um die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y z_{xx} + z_{yy} = 0, \quad (T)$$

welche in der Halbebene $y > 0$ elliptisch und in der Halbebene $y < 0$ hyperbolisch ist, und heute meistens als *Tricomische Gleichung* bezeichnet wird.

Aber 1920 wie auch später habe ich freilich keine Ahnung gehabt, daß diese vom Standpunkt der reinen Mathematik sehr interessante Gleichung auch für die Gasdynamik so wichtig sein könnte, und ich habe sie nur darum ausgewählt, weil diese Gleichung eine der *einfachsten* war, in der die neue Erscheinung der Änderung des Types vorkam. Höchstens habe ich auf das Verdienst Anspruch, daß ich — trotz mancher Winke seitens einflußreicher Leute — es immer abgelehnt habe, die „allgemeinste“ anstatt die „einfachste“ Gleichung von gemischtem Typus zu untersuchen.

¹ F. Tricomi, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto*. Mem. Acc. Lincei (5) **14**, 133—247 (1923). Russische und englische (Brown University, 1948) Übersetzungen vorhanden. Eine stark vereinfachte Darstellung der wichtigsten Teile dieser Abhandlung ist in einem Kapitel meiner soeben erschienenen *Lezioni sulle equazioni a derivate parziali* (Torino, Gheroni, 1954) enthalten.

Der Zusammenhang zwischen der stationären, ebenen, wirbelfreien Strömung eines *kompressiblen* Mediums und den partiellen Differentialgleichungen von gemischtem Typus stellt nichts wesentlich anderes dar, als den klassischen Zusammenhang zwischen ähnlichen Strömungen volumbeständiger Medien und der Laplaceschen Gleichung $\Delta_2 z = 0$.

In der Tat, wenn wir mit

$$\mathbf{v} = v_1(x, y) \mathbf{i} + v_2(x, y) \mathbf{j}$$

die Vektor-Geschwindigkeit eines strömenden, im Punkte (x, y) liegenden Gasteilchens bezeichnen, führt die Wirbelfreiheit in beiden Fällen zur Gleichung

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

während die *Bilanz* der durch irgendeine geschlossene Kurve ein- und ausströmenden Flüssigkeit zur „Kontinuitätsgleichung“

$$\operatorname{div}(\delta \mathbf{v}) = \frac{\partial(\delta v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta v_2)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

führt, wobei δ die (im allgemeinen veränderliche) Gasdichte bedeutet. In beiden Fällen garantieren diese beiden Gleichungen die Existenz eines *Geschwindigkeitspotentials* $\varphi(x, y)$ und einer *Stromfunktion* $\psi(x, y)$, welche durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\delta_0}{\delta} \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\delta_0}{\delta} \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_2 \quad (3)$$

(wo δ_0 eine willkürliche Konstante bedeutet) miteinander und mit den Geschwindigkeitskomponenten v_1 und v_2 verbunden sind.

Ist nun aber $\delta = \delta_0 = \text{const.}$, dann sind die Gleichungen (3) nichts anderes als die wohlbekannten *Cauchy-Riemannschen* Grundgleichungen der Potentialtheorie, woraus die *Laplaceschen* Gleichungen $\Delta_2 \varphi = 0$ und $\Delta_2 \psi = 0$ unmittelbar folgen. Ist dagegen δ veränderlich, dann braucht man für seine Elimination weitere Hypothesen (außer der Wirbelfreiheit usw.), nämlich Hypothesen, welche zu einer „*Adiabaten-gleichung*“ führen, d. h. zu einer Beziehung zwischen Dichte δ und Druck p der Form

$$p = f(\delta), \quad (4)$$

wo $f(\delta)$ eine stets wachsende Funktion von δ bezeichnet. Insbesondere, im wirklichen *adiabatischen* Fall hat man bekanntlich

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)^k, \quad (4')$$

wobei p_0 den der Dichte δ_0 entsprechenden Druck und $k = c_p/c_v$ das Verhältniß (in der Luft ungefähr gleich 1,405) der spezifischen Wärme des Mediums bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen bezeichnen.

Außerdem hat man das wohlbekannte *Bernoullische* Integral, das — falls p_0 und δ_0 den Druck bzw. die Dichte im Ruhezustand (d. h. für $v = 0$) bedeuten — die besonders einfache Gestalt

$$\frac{1}{2} v^2 + \int_{p_0}^p \frac{1}{\delta} dp = 0 \quad (5)$$

annimmt.

Beide Gleichungen zeigen zusammen, daß δ und p wie auch die sehr wichtige *Schallgeschwindigkeit*:

$$u = \sqrt{f'(\delta)}$$

als Funktionen der skalaren Stromgeschwindigkeit:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$$

betrachtet werden können, und man bekommt für φ , nach der Elimination von δ , die ziemlich einfache (aber leider nicht lineare!) partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F[\varphi] \equiv (u^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} - 2 \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (u^2 - \varphi_y^2) \varphi_{yy} = 0 \quad (6)$$

und eine ähnliche für ψ . Das dabei vorkommende Quadrat u^2 der Schallgeschwindigkeit ist (im adiabatischen Falle) mit $v^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$ durch die ganz einfache Gleichung

$$u^2 = \frac{k-1}{2} (v_m^2 - v^2) \quad (7)$$

gebunden, wobei

$$v_m = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\delta_0}}$$

die *Höchstgeschwindigkeit* bei der betrachteten Strömung, d. h. die $p = 0$ entsprechende Stromgeschwindigkeit (*Ausströmen ins Vakuum*) bedeutet.

Trotz der Nicht-Linearität der Gleichung (6) wird ihr „Charakter“ rasch bestimmt, da man (mit klassischen Bezeichnungen)

$$R \equiv \frac{\partial F}{\partial \varphi_{xx}} = u^2 - \varphi_x^2, \quad S \equiv \frac{\partial F}{\partial \varphi_{xy}} = -2 \varphi_x \varphi_y, \quad T \equiv \frac{\partial F}{\partial \varphi_{yy}} = u^2 - \varphi_y^2;$$

$$S^2 - 4 R T = 4 u^2 (v^2 - u^2)$$

hat. Man hat also durchwegs $S^2 - 4 R T < 0$ oder durchwegs $S^2 - 4 R T > 0$, je nachdem $v < u$ (*Unterschallbereich*) oder $v > u$ (*Überschallbereich*) ist. Mit anderen Worten kann man sagen, daß die Gleichung (6) entweder *elliptisch* ($S^2 - 4 R T < 0$) oder *hyperbolisch* ($S^2 - 4 R T > 0$) ist, je nachdem die ganz wichtige *Machsche Zahl*

$$M = \frac{v}{u}$$

kleiner oder größer als *eins* ist. Noch besser, wenn man sich überlegt, daß — kraft der Gleichung (7) (oder einer ähnlichen im nicht-adiabatischen Falle) — die Bedingung $v = u$ dann und nur dann befriedigt wird, wenn v eine gewisse *kritische* Geschwindigkeit v_c erreicht, kann man sagen, daß die Gleichung (6) für $v < v_c$ elliptisch und für $v > v_c$ hyperbolisch ausfällt.

Im adiabatischen Falle ist diese kritische Geschwindigkeit durch die Gleichung

$$v_c^2 = \frac{k-1}{2} (v_m^2 - v_c^2)$$

gegeben, woraus

$$v_c^2 = \frac{k-1}{k+1} v_m^2 = \frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\delta_0}$$

folgt.

2. Die Differentialgleichungen der kompressiblen Strömung können entweder von einem angenäherten Standpunkte (den wir hier beiseite lassen) oder auch von einem strengen Standpunkte aus *linearisiert* werden, aber der „Preis“, den man dafür zu bezahlen hat, ist ziemlich hoch. Man muß nämlich von der *Strömungsebene* (x, y) zur *Geschwindigkeitsebene* (v_1, v_2) übergehen, was nicht angenehm ist; erstens wegen der Mehrdeutigkeiten, die sich dabei ergeben, zweitens wegen der Tatsache, daß die Übergangsformeln nur dann angegeben werden können, wenn man eine bestimmte Funktion φ (oder ψ , oder beide) ausgewählt und zugrundegelegt hat.

Die praktische Ausführung der Umformung ist dagegen ziemlich leicht, da man dafür bloß die klassische *Legende-Transformation*, oder

besser die verwandte *Molenbroek-Chapligyn-Transformation* (welche die Änderung der unbekannten Funktion vermeidet) anzuwenden braucht. Damit und mit elementaren Rechnungen, in denen die komplexe Hilfsgröße $z = x + i y$ und deren Differential:

$$dz = dx + i dy = \frac{1}{v} e^{i\theta} (d\varphi + i \frac{\delta_0}{\delta} d\psi) \quad (8)$$

(für θ siehe unten) eine Rolle spielen, bekommt man die beiden *linearen* Grundgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial w} = A(w) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial w},} \quad (9)$$

welche die nicht-linearen Differentialgleichungen für φ und ψ vorteilhaft ersetzen. Die dabei vorkommenden neuen Variablen θ und w sind der Phasenwinkel der Vektor-Geschwindigkeit v und die adimensionale Variable

$$w \equiv w(v) = - \int_{v_c}^v \frac{\delta}{\delta_0 v} dv; \quad (10)$$

während man der Kürze wegen

$$A(w) = \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^2 (1 - M^2) \quad (11)$$

gesetzt hat.

Nun kann man eine der beiden Unbekannten, z. B. φ aus den beiden Gleichungen (9) sofort eliminieren und es ergibt sich so die *lineare* partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$A(w) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} = 0 \quad (12)$$

für die Stromfunktion ψ ; eine Gleichung, die zwar sehr ähnlich, aber nicht identisch mit der Standard-Gleichung (T) ist, weil $A(w)$ zwar dasselbe Vorzeichen wie w besitzt, aber nicht gleich oder proportional zu dieser Variablen ist.

Man muß sich daher entweder mit einem *angenäherten* Zusammenfallen der beiden Gleichungen begnügen, oder — wie heute meistens vorgezogen wird — die adiabatische Gleichung (4') so „retuschieren“, daß $A(w)$ proportional zu w ausfällt. Genauer: man setzt

$$A(w) = a w, \quad a = \frac{\delta_0}{\delta_c} (1 + k)^{1/2}, \quad (13)$$

wo δ_c die *kritische* Dichte, d. h. die Dichte für $v = v_c$ bedeutet. Es ist aber nicht zu vergessen, daß mit diesem Eingriff eine Art von künstlichem Gas (öfters „*Tricomi-Gas*“ genannt, aber ich nehme diese Vaterschaft nur mit gemischten Gefühlen an), erzeugt wird, das fern von der „*sonic-line*“ $M = 1$ manche befremdende Eigenschaften besitzt. Zum Beispiel, für $v \rightarrow v_m = \infty$ strebt die *Mach*sche Zahl in diesem Gas gegen eins, und sie kann die ziemlich niedrige obere Schranke 1,14 nie übersteigen! ²

Wie es auch immer sei, wenn man diese Unannehmlichkeiten in Kauf nimmt und — wie es sich als vorteilhaft erweisen wird — noch dazu

$$\eta = a w, \quad \varphi_1 = \frac{1}{v_c} \varphi, \quad \psi_1 = \frac{a}{v_c} \psi \quad (14)$$

setzt, dann wird die Reduktion der Gleichung (12) zur Gleichung (T) oder, noch besser, des Systems (9) zum System

$$\boxed{\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}} \quad (15)$$

(wo alle Variablen dimensionslos sind) spielend leicht.

3. Jeder speziellen Lösung des letzten Systems — oder, was im wesentlichen dasselbe ist, jeder speziellen Lösung der Gleichung (T) — wird eine spezielle *transonische* Strömung, d. h. eine spezielle Strömung mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit zugeordnet.

Die spezielle Strömung, die wir hier betrachten wollen, ist mit einer speziellen Lösung der Gleichung (T) verbunden, die man auf folgende Weise ermitteln kann: 1. Die Gleichung wird durch die Substitution

$$x_1 = x, \quad y_1 = \frac{2}{3} y^{3/2}, \quad z_1 = y_1^{-1/2} z$$

transformiert. 2. Übergang zu Polarkoordinaten ϱ, ϑ in der (x_1, y_1) -Ebene. 3. Anwendung der Methode der Trennung der Variablen, indem man die in ein Produkt einer Funktion $R(\varrho)$ der Größe

$$\varrho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{9} y^3}$$

und einer Funktion $F(\tau)$ der Variablen

² Siehe meine letzte Note: „*Stranezze del Tricomi-gas*“ in Rend. Acc. Naz. Lincei (8) 16 (1954 I).

$$\tau = \frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta} = \frac{\varrho - x}{\varrho + x}$$

gespaltete Lösungen der transformierten Gleichung sucht.

Da man damit — unter Hinzufügung einer willkürlichen Konstanten $c = \nu(\nu + 1)$ — die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{d\varrho} \left(\varrho^2 \frac{dR}{d\varrho} \right) - \nu(\nu + 1) R = 0, \quad \frac{d}{d\tau} \left(\tau \frac{dF}{d\tau} \right) + \left[\frac{\nu(\nu + 1)}{(1 + \tau)^2} - \frac{1}{36\tau} \right] F = 0$$

für $R(\varrho)$ bzw. $F(\tau)$ bekommt, muß zuerst

$$R = \varrho^\nu \quad \text{oder} \quad R = \varrho^{-(\nu+1)}$$

sein. Die zweite Gleichung führt dagegen im allgemeinen zu Kugelfunktionen, aber falls $\nu(\nu + 1) = 0$ ist, hat man ganz einfach

$$F(\tau) = \tau^{\pm 1/6}.$$

Es liegt also ganz nahe, gerade diese Wahl zu treffen und — ohne auf Einzelheiten der entsprechenden einfachen Rechnungen einzugehen — so kommen wir auf die folgende besonders einfache Lösung³ des Grundsystems (15):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (3/2)^{1/2} [(\varrho + \theta)^{1/2} - (\varrho - \theta)^{1/2}] \\ \varphi_1 &= \frac{1}{2} (3/2)^{1/2} [(\varrho + \theta)^{1/2} + (\varrho - \theta)^{1/2}] \end{aligned} \quad (\varrho^2 = \theta^2 + \frac{4}{9} \eta^2). \quad (16)$$

Eine der hervorragenden Eigenschaften dieser Lösung ist die Möglichkeit, beide Gleichungen (16) durch zwei *algebraische* Gleichungen zu ersetzen. In der Tat, wenn man ψ_1^2 und φ_1^3 berechnet, sieht man sofort ein, daß die zwei algebraischen Beziehungen

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \psi_1^3 + \eta \psi_1 - \theta = 0 \\ \varphi_1 = \frac{1}{2} \psi_1^2 + \eta \end{cases} \quad (17)$$

gelten.

Insbesondere zeigt die erste dieser beiden Gleichungen, daß die *Abbildungen der Stromlinien auf die Hilfsebene* (θ, η) *Geraden sind*. Genauer sind sie die Geraden, welche die durch die Gleichungen

³ Zuerst vielleicht von H. Cabannes, *Contribution à l'étude théorique des fluides compressibles etc.* [Ann. École Norm. Sup. (3) 69 (1952), 1—63] auf einem komplizierten Wege erhalten. S. auch M. H. Martin and W. R. Thirkston, *An example of transonic flow for the Tricomi gas*, [4th Symposium Applied Math.-American Math. Soc. 1951, S. 61—73. (New York, 1953)].

$$\frac{1}{3} \psi_1^3 + \eta \psi_1 - \theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi_1} (\frac{1}{3} \psi_1^3 + \eta \psi_1 - \theta) \equiv \psi_1^2 + \eta = 0$$

dargestellte Kurve dritter Ordnung C_3 :

$$\theta^2 + \frac{4}{9} \eta^3 = 0 \quad (18)$$

umhüllen. Mit anderen Worten: Die Stromlinien der Hilfsebene (θ, η) sind die Tangenten der aus dem Ursprung ausgehenden Charakteristiken der Gleichung (T) (Abb. 1).

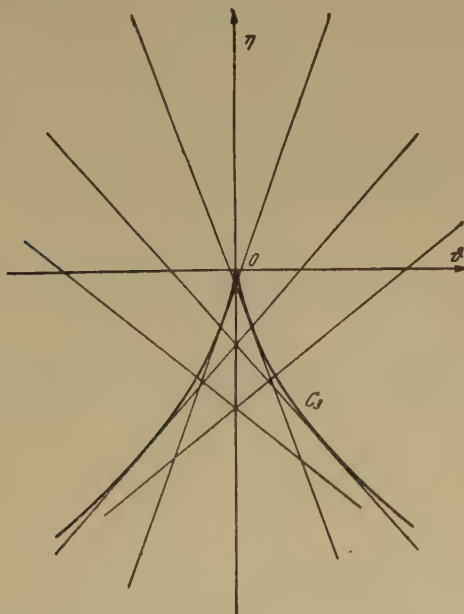


Abb. 1.

Man sieht so unter anderem ein, daß durch jeden oberhalb der Kurve C_3 liegenden Punkt der (θ, η) -Ebene genau eine Stromlinie geht, während durch jeden Punkt unterhalb C_3 drei solche Linien gehen. Die daraus entstandenen Vieldeutigkeiten sind aber keine wirklichen Singularitäten unseres gasdynamischen Problems, sondern werden nur durch den Übergang zur Hilfsebene (θ, η) verursacht, und verschwinden bei der Rückkehr zur Strömungsebene $(x, y)^4$.

⁴ Es werden übrigens schon in gewöhnlichen Unterschallproblemen durch den Übergang zur Geschwindigkeitsebenen ähnliche Vieldeutigkeiten öfters verursacht.

4. Nun wollen wir zur Strömungsebene zurückkehren, weil nur der Verlauf der Stromlinien dort entscheiden kann, ob die betrachtete Strömung nur Übungsmaterial für Studierende liefern kann, oder ob sie auch von etwaigem Wert für die Anwendung sein mag.

In der Tat — in Anbetracht der Tatsache, daß in der relativen, zweidimensionalen Bewegung von festen Körpern und Flüssigkeiten, die Spuren der „festen Wände“ auf der Strömungsebene notwendig Stromlinien sein müssen — kann irgendeine spezielle Strömung nur dann eine technische Bedeutung haben, wenn manche Strecken der entsprechenden Stromlinien sich für die Idealisierung der in irgendeinem technischen Problem vorkommenden festen Wänden eignen. Zum Beispiel: Für die Wände einer *De Laval Düse*, d. h. von einem „Rohr“, bei dem sich der Querschnitt zuerst verengt und dann wieder erweitert.

Für die Rückkehr zur Strömungsebene werden wir die Gleichung (8) benutzen, die jetzt auch in der Form (mit φ_1 und ψ_1 anstatt φ und ψ)

$$dz = dx + i dy = \frac{v_c}{v} e^{i\theta} (d\varphi_1 + i \frac{\delta_0}{a\delta} d\psi_1)$$

geschrieben werden kann.

Auf einer Stromlinie (wo $d\psi_1 = 0$, $d\varphi_1 = d\eta$ ist) bekommen wir speziell

$$dz = \frac{v_c}{v} e^{i\theta} d\eta,$$

woraus sich

$$dx = \frac{v_c}{v} \cos \theta d\eta, \quad dy = \frac{v_c}{v} \sin \theta d\eta \quad (19)$$

ergibt.

Auf einer Linie $v = \text{const.}$ (d. h. $\eta = \text{const.}$) haben wir dagegen

$$d\varphi_1 = \psi_1 d\psi_1, \quad dz = \frac{v_c}{v} e^{i\theta} (\psi_1 + i \frac{\delta_0}{a\delta}) d\psi_1,$$

woraus sich

$$dx = \frac{v_c}{v} (\psi_1 \cos \theta - \frac{\delta_0}{a\delta} \sin \theta) d\psi_1, \quad dy = \frac{v_c}{v} (\psi_1 \sin \theta + \frac{\delta_0}{a\delta} \cos \theta) d\psi_1.$$

ergibt.

Noch spezieller bekommen wir auf der *sonic-line* $\eta = 0$ — da dort $v = c_c$ und

$$\frac{\delta_0}{a\delta} = \frac{\delta_0}{a\delta_c} = (1+k)^{-1/2} = \kappa \quad (20)$$

ist —

$$dx = (\psi_1 \cos \theta - \kappa \sin \theta) d\psi_1, \quad dy = (\psi_1 \sin \theta + \kappa \cos \theta) d\psi_1.$$

Aber auf der *sonic-line* ist auch

$$^{1/3} \psi_1^3 - \theta = 0, \quad \text{d. h.} \quad \psi_1 = (3\theta)^{1/3};$$

doch — unter der Annahme, daß der Ursprung der Strömungsebene im Punkte $\psi_1 = 0$ der *sonic-line* festgelegt sei — können wir die Koordinaten (x_s, y_s) der Punkte derselben *sonic-line* durch die parametrischen Darstellungen

$$\begin{cases} x_s = 3^{-1/2} \int_0^\theta \theta^{-1/2} \cos \theta d\theta - 3^{-1/2} \kappa \int_0^\theta \theta^{-1/2} \sin \theta d\theta \\ y_s = 3^{-1/2} \int_0^\theta \theta^{-1/2} \sin \theta d\theta + 3^{-1/2} \kappa \int_0^\theta \theta^{-1/2} \cos \theta d\theta \end{cases} \quad (21)$$

berechnen.

Man sieht so ein, daß die Bestimmung der *sonic-line* von gewissen, von E. Böhmer⁵ eingeführten Verallgemeinerungen der *Fresnelschen* Integrale abhängt. Oder man kann auch die von (21) sofort abzuleitenden Potenzentwicklungen benutzen, die u. a. die Gestalt der *sonic-line* in der Umgebung des Ursprungs leicht zu bestimmen erlauben. In der Tat findet man

$$x_s = \psi_1^2 + \dots, \quad y_s = \frac{1}{\kappa} \psi_1 + \dots,$$

wo die Punkte Glieder höherer Ordnung als die geschriebenen bezeichnen. Dies zeigt, daß der in der Umgebung des Ursprungs liegende Teil der *sonic-line* ungefähr die Gestalt einer Parabel hat. Genauer: Eine Parabel mit dem Scheitel im Ursprung, der x -Achse als Parabelachse, die Konkavität gegen die einströmende Flüssigkeit gewendet und einem minimalen Krümmungsradius $\kappa^2/2 \approx 0,28$.

Nun wenden wir uns den Stromlinien zu!

Um sie zu bestimmen, braucht man nur die beiden Differentiale (19) vom Schnittpunkt (x_s, y_s) der betrachteten Stromlinie mit der *sonic-line* zu integrieren, was zu den Formeln

$$x = x_s + \Phi(\eta) \cos \theta, \quad y = y_s + \Phi(\eta) \sin \theta \quad (22)$$

⁵ E. Böhmer, *Differenzengleichungen und bestimmte Integrale*, Leipzig, 1939.
Monatshefte für Mathematik. Bd. 58/3.

führt, wo η und θ durch die erste der Gleichungen (16) verbunden sind, und

$$\Phi(\eta) = v_c \int_0^{\eta} \frac{1}{v} d\eta \quad (23)$$

sei.

Es wäre nicht schwierig, die Funktion $\Phi(\eta)$ in geschlossener Form durch Zylinderfunktionen der Ordnung $\pm 1/3$ und deren Integrale zu bestimmen. Aber — in Anbetracht der Tatsache, daß hier nur kleine Werte von $|\eta|$ in Frage kommen — ist vielleicht folgende stets konvergente Potenzentwicklung von $\Phi(\eta)$ vorzuziehen:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(\eta) &= \eta + \frac{1}{4!} \eta^4 + \frac{1 \cdot 4}{7!} \eta^7 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{10!} \eta^{10} + \dots + \\ &+ \kappa \left(\frac{1}{2!} \eta^2 + \frac{2}{5!} \eta^5 + \frac{2 \cdot 5}{8!} \eta^8 + \dots \right) \end{aligned} \right. \quad (24)$$

Dabei ist aber aufzupassen, daß η keinesfalls eine gewisse untere Schranke — η_0 ($\approx -1,158$) überschreiten darf, da sonst $\Phi'(\eta) < 0$ wird, während aus (23)

$$\Phi'(\eta) = \frac{v_c}{v} > 0$$

folgt; eine Formel, die mit einem negativen $\Phi'(\eta)$ nicht verträglich ist. Diese ist eine weitere der Tollheiten des „Tricomi-Gases“!

Betrachten wir aber nur ganz kleine Werte von $|\eta|$, z. B. lassen wir η zwischen $-0,185$ und $+0,215$ variieren, dann verläuft alles ganz „vernünftig“ und — wie Abb. 2 zeigt — haben die Stromlinien einen solchen Verlauf, daß unsere transonische Strömung für die theoretische Untersuchung des „kritischen“ Ausströmens eines Gases aus einer (zweidimensionalen) De Laval Düse ausgenützt werden kann⁶. Es handelt sich also um einen für die Technik keineswegs wertloses Beispiel!

Um diese technische Anwendungsmöglichkeit einzusehen, braucht man nur zwei geeignete Strecken zweier Stromlinien der Abb. 2 — z. B. die doch stark markierten — als „Wände“ zu betrachten.

⁶ Man spricht von „kritischem“ Ausströmen, wenn die Stromgeschwindigkeit (steigend) die Schallgeschwindigkeit in der Nähe des minimalen Querschnittes der Düse erreicht.

Die Tatsache, daß stromabwärts diese „Wände“ gerade bis zum Schnittpunkt mit der gestrichelten Kurve — welche die Abbildung der

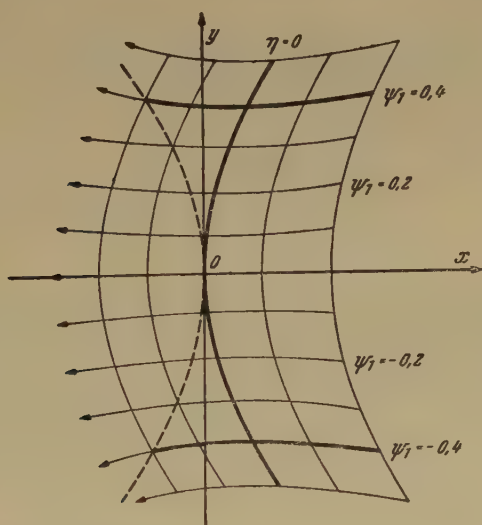


Abb. 2.

„Verzweigungskurve“ C_3 auf die (x, y) -Ebene darstellt — verlängert worden sind, hängt mit dem fundamentalen Eindeigkeitstheorem für die Gleichung (T) zusammen. Dieses Theorem zeigt nämlich, daß die so geführten Wände für die eindeutige Feststellung der entsprechenden Strömung schon genügen. Das scheint von F. I. Frankl⁷ zuerst bemerkt, worden zu sein.

⁷ S. eine russische Note dieser Verf. in *Doklady URSS. Akad.* 56 (1947) 683—686. Ich habe durch das *Zentralblatt für Math.* von dieser Note Kenntnis erhalten.

Über L^1 -Räume auf Gruppen II.

Von

Hans Reiter, Wien.

(Eingelangt am 28. April 1954.)

In einer früheren Arbeit¹ ist ein Satz über integrierbare Funktionen bewiesen worden. Dieser Satz läßt sich wesentlich verallgemeinern — das soll im Folgenden gezeigt werden!

Die Methoden, die zu dieser Verallgemeinerung führen, gehören zu einem Teil der klassischen Analysis, zum anderen der modernen Gruppentheorie an². Wir stellen das Ergebnis gleich in gruppentheoretischer Allgemeinheit an die Spitze³:

SATZ 1: *Sei G eine lokalkompakte Gruppe, g eine abgeschlossene Abelsche Untergruppe und es werde angenommen, daß es auf dem homogenen Raum G/g ein invariantes Maß gibt.*

Dann gilt (bei entsprechender Normierung des Maßes auf G/g) für alle f in $L^1(G)$

$$\inf_G \int \left| f(x) - \sum_{n=1}^N b_n f(x\sigma_n) \right| dx = \int_{G/g} dx' \left| \int_g f(x\xi) d\xi \right|.$$

Dabei durchläuft N alle positiven ganzen Zahlen, die Koeffizienten b_n durchlaufen alle komplexen Zahlen, die der Bedingung

$$\sum_{n=1}^N b_n = 0$$

genügen, und die σ_n die Untergruppe g .

¹ H. J. Reiter, Investigations in Harmonic Analysis, Trans. Amer. Math. Soc. 73, 401—427 (1952); diese Arbeit wird als bekannt vorausgesetzt.

² T. Carleman, L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent, Uppsala 1944; A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris 1940 (2^e éd. 1953).

³ Zur Veranschaulichung wird es gut sein, Funktionen einer reellen Veränderlichen zu betrachten: Man nehme in Satz 1 einfach für G die additive Gruppe der reellen Zahlen und für g z. B. die Untergruppe der ganzen Zahlen.

Für $g = G$ erhält man das frühere Ergebnis¹; für $g = \{e\}$ ist der Satz natürlich trivial.

Bezeichnen wir den von den obigen Linearkombinationen aufgespannten abgeschlossenen Unterraum von $L^1(G)$ mit⁴ $(f)_0^{(g)}$, so können wir die Behauptung des Satzes kurz so schreiben:

$$\text{dist } \{f, (f)_0^{(g)}\} = \|f'\|_1,$$

wo $f'(x) = \int_g f(x\xi) d\xi$ eine Funktion auf G/g ist.

Bemerkung: Die Beziehung

$$\text{dist } \{f, (f)_0^{(g)}\} \geq \|f'\|_1$$

ist trivial.

Um den Satz zu beweisen, haben wir — ähnlich wie früher¹ — die Funktionen φ in $L^\infty(G)$ zu untersuchen, die der Bedingung

$$\int f(x) \varphi(x) dx = 1$$

$$\int \{f(x\sigma) - f(x)\} \varphi(x) dx = 0 \quad \text{für alle } \sigma \text{ in } g$$

genügen, also die Lösungen φ in $L^\infty(G)$ der Integralgleichung

$$\int f(x\sigma) \varphi(x) dx = 1 \quad \text{für alle } \sigma \text{ in } g,$$

die mit

$$\int f(x) \varphi(x\sigma) dx = 1 \tag{1}$$

gleichbedeutend ist (man beachte, daß $\Delta(\sigma) = \delta(\sigma) = 1$ ist; im übrigen haben wir hier die Funktion $\varphi(x)$ selbst und nicht ihre Konjugierte geschrieben); die Integration erstreckt sich über die ganze Gruppe G .

Wir wollen zunächst eine heuristische Betrachtung anstellen, um die Idee des Beweises klar hervortreten zu lassen.

Multiplizieren wir beide Seiten von (1) mit der Funktion⁵ $m^{-1}(\hat{S})S(\sigma)^2$ und integrieren wir nach σ über g , so erhalten wir

$$\int f(x) \varphi_{\hat{S}}(x) dx = 1,$$

wo

$$\varphi_{\hat{S}}(x) = \int_g m^{-1}(\hat{S}) S(\sigma)^2 \varphi(x\sigma) d\sigma$$

⁴ Diese Bezeichnung weicht von der früheren¹ etwas ab.

⁵ Diese Funktion ist nur auf g definiert. Für die Definition und einige Eigenschaften, die im Folgenden benutzt werden, siehe die in Fußnote ¹ zitierte Arbeit (die Funktion ist dort mit $m^{-1}(S) \mathbf{S}(\mathbf{x})^2$ bezeichnet).

ist. Nehmen wir nun an, daß $\lim \varphi_{\hat{S}}(x) = \varphi'(x)$ für $\hat{S} \rightarrow \{\varepsilon\}$ existiert⁶. Dann sieht man: Für ξ in g ist

$$\varphi'(x\xi) = \varphi'(x),$$

also ist $\varphi'(x) = \varphi'(x')$ eine Funktion auf G/g .

Durch Grenzübergang haben wir jetzt

$$\int f(x) \varphi'(x) dx = 1;$$

nun gilt aber für $\varphi'(x)$

$$\int f(x) \varphi'(x) dx = \int_{G/g} dx' \varphi'(x') \int_g f(x\xi) d\xi,$$

also ist

$$\|\varphi'\|_{\infty} \cdot \int_{G/g} dx' \left| \int_g f(x\xi) d\xi \right| \geq 1$$

und daher wegen $\|\varphi'\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_{\infty}$

$$\|\varphi\|_{\infty} \cdot \|\varphi'\|_1 \geq 1. \quad (2)$$

Falls aber (2) für *alle* Lösungen φ in $L^{\infty}(G)$ von (1) gilt, — was noch nicht bewiesen ist — dann folgt sofort:

Wenn $\|\varphi'\|_1 = 0$ ist, dann kann (1) keine Lösungen φ in $L^{\infty}(G)$ haben, also ist

$$\text{dist} \{f, (f)_0^{(g)}\} = 0 = \|\varphi'\|_1.$$

Wenn $\|\varphi'\|_1 > 0$ ist, dann gilt für alle Lösungen

$$\|\varphi\|_{\infty} \geq 1/\|\varphi'\|_1,$$

also

$$\min \|\varphi\|_{\infty} \geq 1/\|\varphi'\|_1.$$

Andererseits sieht man, daß⁷

$$\varphi_{\min}(x) = \overline{\text{sgn } f'(x') / \|\varphi'\|_1}$$

eine Lösung ist, und

⁶ In dem in Fußnote ³ erwähnten Falle kann man an Stelle von $\varphi_{\hat{S}}(x)$ einfach

$\varphi_n(x) = \frac{1}{2n} \sum_{\nu=-n}^n \varphi(x+\nu)$ setzen und dann entsprechend von $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ reden.

Wenn man sich auf reelle Funktionen beschränkt, so kann man $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$

verwenden. Das Fatousche Lemma ergibt dann $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \geq 1$, also mit geringfügiger Abänderung des Folgenden einen Beweis (was übrigens der Ausgangspunkt für die Untersuchung war), doch ist es eben das Problem, den Satz auch für komplexwertige Funktionen zu beweisen.

⁷ $\text{sgn } z = z/|z|$ für $0 < |z| < \infty$; sonst $\text{sgn } z = 0$.

$$\|\varphi_{\min}\|_{\infty} = 1/\|f'\|_1.$$

Also ist wieder

$$\text{dist} \{f, (f)_0^{(g)}\} = \|f'\|_1.$$

Die Annahme, die oben gemacht wurde, war rein heuristisch; um an ihre Stelle einen Beweis zu setzen, gehen wir folgendermaßen vor:

Sei φ eine beliebige Lösung von (1). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und U_ε eine Umgebung von e derart, daß⁸ für t in U_ε

$$\int |f(tx) - f(x)| dx < \varepsilon / \|\varphi\|_{\infty}$$

ist. Dann folgt aus (1) für alle σ in g

$$\left| \int f(tx) \varphi(x\sigma) dx - 1 \right| < \varepsilon$$

oder

$$\left| \int f(x) \varphi(t^{-1}x\sigma) dx - 1 \right| < \varepsilon.$$

Sei jetzt $u_\varepsilon(t) \geq 0$ eine Funktion in $L^1(G)$, die außerhalb von U_ε verschwindet und für die $\int u_\varepsilon(t) dt = 1$ ist. Wir multiplizieren die Ungleichung mit $u_\varepsilon(t)$ und integrieren nach t über G ; dann folgt

$$\int f(x) \varphi_\varepsilon(x\sigma) dx = 1 + \varepsilon(\sigma), \quad (3)$$

wo

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int u_\varepsilon(t) \varphi(t^{-1}x) dt$$

und für alle σ in g

$$|\varepsilon(\sigma)| < \varepsilon$$

ist.

Die Funktion $\varphi_\varepsilon(x)$ ist also nach (3) nur eine Näherungslösung⁹ der Integralgleichung (1), aber dafür ist sie (linksseitig) *gleichmäßig stetig*, d. h.

$$|\varphi_\varepsilon(yx) - \varphi_\varepsilon(x)| < \eta$$

für alle x in G und alle y in V_η , wo V_η eine nur von η abhängige¹⁰ Umgebung von e ist. Diese Eigenschaft der gleichmäßigen Stetigkeit wird für unsere Zwecke entscheidend sein! Weiters ist

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_{\infty}.$$

Wir multiplizieren jetzt — in Analogie mit der früheren heuristischen Betrachtung — die Gleichung (3) mit $m^{-1}(\hat{S})S(\sigma)^2$ und integrieren nach σ über g , so daß wir

⁸ Siehe S. 41 des Buches von A. Weil².

⁹ Im Falle $g = G$ ist übrigens $\varphi(x)$ sogar eine exakte Lösung.

¹⁰ Die Zahl ε ist während der ganzen Untersuchung fest.

$$\int f(x) \varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x) dx = 1 + \varepsilon \hat{S} \quad (4)$$

erhalten, wo

$$\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x) = m^{-1}(\hat{S}) \int_g S(\sigma)^2 \varphi_{\varepsilon}(x\sigma) d\sigma$$

und

$$|\varepsilon \hat{S}| < \varepsilon$$

ist.

Die Funktionen $\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x)$ haben nun folgende Eigenschaften:

a) Sie sind (linksseitig) *gleichgradig stetig* (in Bezug auf $\hat{S}$), denn für beliebiges x in G ist

$$\begin{aligned} |\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(yx) - \varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x)| &\leq \sup_{\sigma \in g} |\varphi_{\varepsilon}(yx\sigma) - \varphi_{\varepsilon}(x\sigma)| \\ &\leq \sup_{z \in G} |\varphi_{\varepsilon}(yz) - \varphi_{\varepsilon}(z)| \\ &\leq \eta \end{aligned}$$

für y in V_{η} , wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\varphi_{\varepsilon}(x)$ (siehe S. 175.)

$$\text{b) } \|\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}\|_{\infty} \leq \|\varphi_{\varepsilon}\|_{\infty} \quad \text{für alle } \hat{S}.$$

c) Sie genügen für alle $\hat{S}$ der Beziehung (4).

Wenn nun G eine *abzählbare dichte* Teilmenge enthält, so kann der Beweis nach klassischen Richtlinien zu Ende geführt werden. Denn dann ist insbesondere die Untergruppe g eine Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Mengen, also hat die duale Gruppe $\hat{g}$ ein abzählbares Fundamentalsystem $(\hat{S}_n)$, $n \geq 1$, von $\hat{e}$ und wenn wir für $n=1, 2, 3, \dots$

$$\varphi_{n, \varepsilon}(x) = \varphi_{\hat{S}_n, \varepsilon}(x)$$

setzen, so gibt es eine Teilfolge (n_r) , $r \geq 1$, derart, daß $\varphi_{n_r, \varepsilon}(x)$ für alle x gegen eine Grenzfunktion $\varphi'_{\varepsilon}(x)$ konvergiert¹¹.

Diese Grenzfunktion $\varphi'_{\varepsilon}(x)$ ist nun konstant auf den linken Nebenklassen von g , d. h. für ξ in g ist

$$\varphi'_{\varepsilon}(x\xi) = \varphi'_{\varepsilon}(x),$$

denn infolge einer Eigenschaft¹² der Funktion $m^{-1}(\hat{S}) S(\sigma)^2$ ist

¹¹ Vgl. den Beweis von Satz IV auf S. 303 bei *H. Hahn*, Theorie der reellen Funktionen I, Berlin 1921. Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig auf jeder kompakten Menge (Satz von Ascoli), doch brauchen wir das hier nicht.

¹² Vgl. die in ¹ zitierte Arbeit, S. 404—405, Formel (ii), und den Beweis von Lemma 2.1.1, S. 418.

$$|\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x\xi) - \varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x)| < \eta'$$

für $\hat{S} \subset \hat{U}_{\eta', \varepsilon}$. Weiters gilt

$$\|\varphi_{\varepsilon}'\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_{\infty}.$$

Wir erhalten also aus (4), indem wir $\hat{S} = \hat{S}_{n_r}$ setzen, durch den Grenzübergang $r \rightarrow \infty$,

$$|\int f(x) \varphi_{\varepsilon}'(x) dx| \geq 1 - \varepsilon.$$

Das Integral links läßt sich nun, da ja $\varphi_{\varepsilon}'(x)$ eine Funktion $\varphi_{\varepsilon}'(x')$ auf G/g ist, in der Form

$$\int_{G/g} dx' \int_g f(x\xi) \varphi_{\varepsilon}'(x\xi) d\xi = \int_{G/g} dx' \varphi_{\varepsilon}'(x') \int_g f(x\xi) d\xi$$

schreiben, also folgt

$$\|\varphi_{\varepsilon}'\|_{\infty} \cdot \int_{G/g} dx' \left| \int_g f(x\xi) d\xi \right| \geq 1 - \varepsilon,$$

und wenn wir $\|\varphi_{\varepsilon}'\|_{\infty}$ durch das nicht kleinere $\|\varphi\|_{\infty}$ ersetzen, erhalten wir, da dann die linke Seite von ε nicht mehr abhängt,

$$\|\varphi\|_{\infty} \cdot \|\varphi'\|_1 \geq 1. \quad (2)$$

Die Beziehung (2) ist jetzt für alle Lösungen von (1) bewiesen, also der Beweis von Satz 1 fertig, sofern G eine abzählbare dichte Untergruppe enthält. Im allgemeinen Fall, wo aber diese Voraussetzung nicht gemacht wird, läßt sich der Beweis folgendermaßen führen:

Sei $(\mathcal{F}, \hat{S})$ ein Fundamentalsystem. Sei $z = (z_{\hat{S}})$, $\hat{S}$ in $(\mathcal{F})$, eine komplexwertige Funktion auf $(\mathcal{F})$. Man sagt, daß $\lim_{\hat{S} \rightarrow \{\hat{e}\}} z_{\hat{S}} = \zeta$ existiert, wenn für jedes $\eta > 0$ $|\zeta - z_{\hat{S}}| < \eta$ ist, falls $\hat{S}$ „genügend klein“ ist ($\hat{S} \subset \hat{S}_{\eta}$). Wir schreiben $\zeta = F(z)$.

Sei $C((\mathcal{F}))$ der Banachsche Raum aller beschränkten komplexwertigen Funktionen $z = (z_{\hat{S}})$ auf $(\mathcal{F})$, mit $\|z\|_C = \sup_{\hat{S} \in (\mathcal{F})} |z_{\hat{S}}|$. Die Menge aller z für die $\lim_{\hat{S} \rightarrow \{\hat{e}\}} z_{\hat{S}}$ existiert, ist ein (abgeschlossener) linearer Unterraum

K von $C((\mathcal{F}))$ und $\zeta = F(z)$ ein lineares Funktional auf K mit Norm 1. Nach dem Satz von Hahn-Banach (für komplexe Banachsche Räume) gibt es also ein lineares Funktional auf $C((\mathcal{F}))$ mit Norm 1, das auf K gleich $F(z)$ ist¹³. Wir bezeichnen es einfach wieder mit $F(z)$.

¹³ Für eine ähnliche Methode vgl. S. 194—195 in der Arbeit von A. M. Gleason, Groups without small subgroups, Ann. of Math. 56 (2), 193—212 (1952).

Für jedes x in G ist nun $(\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x))$ ein Element von $C(\mathcal{F})$, also $F(\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x)) = \varphi'_\varepsilon(x)$ eine Funktion auf G . Diese Funktion ist (linksseitig) *gleichmäßig stetig*, denn

$$|\varphi'_\varepsilon(yx) - \varphi'_\varepsilon(x)| \leq \|\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(yx) - \varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x)\|_C$$

und wegen der (linksseitigen) gleichgradigen Stetigkeit¹⁴ von $\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x)$ ist die rechte Seite $\leq \eta$, für alle x in G , wenn y in V_η ist. Außerdem ist $\|\varphi'_\varepsilon\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$, weil F Norm 1 hat¹⁵, und es gilt wieder $\varphi'_\varepsilon(x\xi) = \varphi'_\varepsilon(x)$ für ξ in g , weil $\lim_{\hat{S} \rightarrow \{\hat{e}\}} [\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x\xi) - \varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x)] = 0$ ist¹⁶. Aus (4)

folgt nun

$$F(\int f(x) \varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x) dx) = 1 + F(\varepsilon_{\hat{S}}).$$

Nun gilt auf Grund der (linksseitigen) gleichgradigen Stetigkeit der Funktionen $\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x)$, daß die linke Seite gleich $\int f(x) \varphi'_\varepsilon(x) dx$ ist¹⁷, also erhalten wir wie vorher

$$|\int f(x) \varphi'_\varepsilon(x) dx| \geq 1 - \varepsilon$$

usw., und der Beweis ist endgültig abgeschlossen.

Satz 1 gilt auch für kompakte Untergruppen g ; der Beweis ist dann natürlich ganz einfach, weil ja in diesem Falle die konstante Funktion 1 in $L^1(g)$ enthalten ist.

Wenn g Normalteiler ist, kann man den Satz ebensogut für Linearkombinationen $\sum_{n=1}^N b_n f(\sigma_n x)$ aussprechen und ganz analog beweisen.

¹⁴ Vgl. S. 176, Eigenschaft a). In diesem Zusammenhang sei auf folgendes Problem hingewiesen: Wenn für $\hat{S}$ in $(\mathcal{F})$ die Funktionen $\psi_{\hat{S}}(x)$ meßbar sind und $|\psi_{\hat{S}}(x)| \leq M$ ist, ist dann $F(\psi_{\hat{S}}(x))$ eine meßbare Funktion?

¹⁵ Vgl. S. 176, Eigenschaft b) und Seite 175.

¹⁶ Vgl. S. 177.

¹⁷ Denn auf Grund der *gleichgradigen* Stetigkeit und Beschränktheit gibt es zu jedem $\eta > 0$ Konstante $c_1, c_2, \dots, c_N$ und Elemente $x_1, x_2, \dots, x_N$ in G derart, daß für *alle* $\hat{S}$

$$|\int f(x) \varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x) dx - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x_n)| < \eta \quad (a)$$

und ebenso, da ja $\varphi'_\varepsilon(x)$ mit den $\varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x)$ gleichgradig stetig und beschränkt ist (S. 178),

$$|\int f(x) \varphi'_\varepsilon(x) dx - \sum_{n=1}^N c_n \varphi'_\varepsilon(x_n)| < \eta \quad (a')$$

ist. Aus (a) folgt

$$|F(\int f(x) \varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x) dx) - F(\sum_{n=1}^N c_n \varphi_{\hat{S}, \varepsilon}(x_n))| \leq \eta \quad (b)$$

und aus (a') und (b) folgt, da $\eta > 0$ beliebig ist, die Behauptung des Textes.

Der Beweis, der hier gegeben wurde, ist im Vergleich zu einem früheren Beweis elementar in dem Sinne, daß der Wiener'sche Satz über Fouriertransformierte nicht benutzt wurde. Allerdings sagt gerade Lemma 1.1.1 in der in ¹ zitierten Arbeit, dessen Beweis auf dem Wiener'schen Satz beruht, mehr aus als wir hier bewiesen haben, nämlich, daß es in dem dort betrachteten Falle nur eine einzige Lösung φ der Integralgleichung (1) gibt, für die in der Beziehung $\|\varphi\|_\infty \geq 1/\|\varphi'\|$, das Gleichheitszeichen gilt (vgl. S. 174—175).

Die Fouriertransformation selbst spielt aber im Beweis doch eine Rolle, denn die Funktion $m^{-1}(\hat{S})S(\sigma)$ ist mittels der Fouriertransformation definiert und ihre Eigenschaften gründen sich¹ auf den Satz von Plancherel-Weil. Auf der Geraden kann man natürlich den gewöhnlichen Mittelwert nehmen⁶ und dann den Beweis also wirklich ganz elementar führen. —

Definition: Eine Menge von Funktionen auf G heißt *rechtsvariant in Bezug auf die Untergruppe g* , kurz *g -rechtsinvariant*, wenn sie mit einer Funktion $k(x)$ auch die Funktion $k(x\sigma)$, für beliebiges σ in g , enthält.

Sei g eine Untergruppe von G , die den Voraussetzungen von Satz 1 genügt, $I^{(g)}$ ein g -rechtsinvarianter abgeschlossener linearer Unterraum¹⁸ von $L^1(G)$ und $I_0^{(g)}$ der abgeschlossene lineare Unterraum, der von *allen* endlichen Linearkombinationen

$$\sum b_n f(x\sigma_n) \quad (\sum b_n = 0, \sigma_n \text{ in } g),$$

für beliebiges f in $I^{(g)}$, aufgespannt wird.

Dann gilt für alle Funktionen k in $I^{(g)}$

$$\text{dist} \{ k, I_0^{(g)} \} = \int_{G/g} dx' \mid \int_g k(x\xi) d\xi \mid.$$

Denn es ist klar, daß diese Beziehung mit „ $\geq$ “ an Stelle des Gleichheitszeichens gilt, und die Behauptung ergibt sich dann auf Grund von Satz 1¹⁹.

¹⁸ Man kann für beliebig abgeschlossene Untergruppen zeigen, daß ein abgeschlossener linearer Unterraum von $L^1(G)$ dann und nur dann g -rechtsinvariant ist, wenn er mit $f(x)$ auch $\int_g f(x\sigma) h(\sigma^{-1}) d\sigma$ für alle $h(\sigma)$ in $L^1(g)$ enthält.

¹⁹ Man braucht in der Definition von $I_0^{(g)}$ nicht alle Funktionen in $I^{(g)}$ zu nehmen, sondern könnte sich wie früher¹ auf ein „Erzeugendensystem“ (in Bezug auf g) beschränken, wo also — in leicht verständlicher Schreibweise — $I^{(g)} = (f, h, \dots)^{(g)}$ ist. Der Beweis wird dann nur unwesentlich länger und ist ähnlich zu führen wie a. a. O.¹,

Es folgt also:

SATZ 2: Seien $I^{(g)}$ und $I_0^{(g)}$ wie oben definiert. Dann gilt:

(i) $I_0^{(g)}$ besteht genau aus allen Funktionen $f_0(x)$ in $I^{(g)}$, für die $f_0'(x') = \int_0^g f_0(x\xi) d\xi$ verschwindet; also:

(ii) Der Quotientenraum $I^{(g)}/I_0^{(g)}$ ist algebraisch isomorph mit $T(I^{(g)})$, dem Unterraum von $L^1(G/g)$, auf den $I^{(g)}$ durch die Transformation

$$f'(x') = T(f(x)) = \int_0^g f(x\xi) d\xi$$

abgebildet wird.

(iii) Diese Isomorphie ist isometrisch.

Damit haben wir eine allgemeine Beziehung zwischen den abgeschlossenen linearen Unterräumen von $L^1(G)$, die g -rechtsinvariant sind, und den abgeschlossenen linearen Unterräumen von $L^1(G/g)$, allerdings nur für Abelsche oder kompakte Untergruppen g ; nehmen wir für $I^{(g)}$ insbesondere den ganzen Raum $L^1(G)$, so erhalten wir einen speziellen Fall des Ergebnisses von Teil I dieser Arbeit²⁰.

²⁰ Dieser Band, S. 73—76. Dabei wird natürlich ein Beweis von A. Weil benutzt (vgl. den Schluß des Beweises¹ von Theorem 1. 3). Übrigens wird es bequem sein, in Teil I die Bezeichnungen K und K_0 zu vertauschen.

Über eine Gruppe der Zahlentheorie.

Von

Wilfried Nöbauer, Linz.

(Eingelangt am 20. Mai 1954.)

Einleitung: In der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ der Restklassen nach dem Ideal A_n der Restpolynome mod n , deren Polynome eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Restklassenringes mod n auf sich erzeugen¹, bilden diejenigen Restklassen, welche einen Repräsentanten der Gestalt x^k besitzen, wie unmittelbar ersichtlich ist, eine abelsche Untergruppe $\mathfrak{P}_n$. In dieser Arbeit wird die Struktur von $\mathfrak{P}_n$ näher untersucht und auf einige zahlentheoretische Probleme, die mit Fragen über $\mathfrak{P}_n$ zusammenhängen, eingegangen.

§ 1. Wir stützen uns zunächst auf folgende beiden allgemeinen Sätze:²

Ein Polynom $f(x)$ erzeugt dann und nur dann eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Restklassenringes mod ab mit³ $\{a, b\} = 1$, wenn es eine solche sowohl mod a , als auch mod b erzeugt.

Ein Polynom $f(x)$ erzeugt höchstens dann eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Restklassenringes mod p^e mit $e > 1$, wenn $f'(x) \not\equiv 0 \pmod{p}$ für jedes ganze x gilt.

Aus diesen Sätzen ergibt sich: Für alle nicht quadratfreien Zahlen n besteht $\mathfrak{P}_n$ nur aus dem Einheitsselement. Denn erzeugt x^k eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Restklassenringes mod $p^e a$ mit $\{p, a\} = 1$ und $e > 1$, so muß gelten: $kx^{k-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$ auch für $x = 0$, was nur für $k = 1$ erfüllt ist.

Wir setzen daher von nun ab n als quadratfreie Zahl mit der Primzahlzerlegung: $n = p_1 p_2 \dots p_r$ voraus und beweisen zunächst zwei Hilfssätze:

¹ Vgl. meine Arbeit: Über Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen. Sitz.-Ber. Österr. Akad. Wiss. Abt. II a, Bd. 162, S. 207—233.

² Vgl. meine Arbeit in 1.

³ Vgl. Fußnote 4.

a) Die kleinste natürliche Zahl $l \neq 1$ mit $x^l \equiv x \pmod{A_n}$ ist gegeben durch⁴ $l = [p_i - 1] + 1$.

Beweis: Aus $x^k \equiv x \pmod{A_n}$ folgt $x^k \equiv x \pmod{A_{p_i}}$ für $i = 1, 2 \dots r$, daraus weiter $x^{k-1} \equiv 1 \pmod{p_i}$ für alle ganzen $x \not\equiv 0 \pmod{p_i}$, also gilt: $k - 1 \equiv 0 \pmod{(p_i - 1)}$, daher $k - 1 \equiv 0 \pmod{[p_i - 1]}$. Da nun aber $x^{m(p-1)+1} \equiv x \pmod{p}$ für jedes ganze x und jede Primzahl p gilt, gilt auch: $x^l \equiv x \pmod{p_i}$ für $i = 1, 2 \dots r$, daher $x^l \equiv x \pmod{A_n}$.

b) Dann und nur dann gilt: $x^u \equiv x^v \pmod{A_n}$, wenn auch gilt $u \equiv v \pmod{(l - 1)}$.

Beweis: Aus $x^u \equiv x^v \pmod{A_n}$ folgt genau wie beim Beweis von Hilfssatz a) die Gültigkeit von $u \equiv v \pmod{(l - 1)}$. Umgekehrt folgt aus $x^l \equiv x \pmod{A_n}$ sofort $x^{u+l-1} \equiv x^u \pmod{A_n}$ und daraus durch wiederholte Anwendung $x^{u+m(l-1)} \equiv x^u \pmod{A_n}$ für jedes natürliche m .

Aus dem ersten der eingangs angeführten Sätze folgt nun, daß x^k dann und nur dann eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Restklassenringes mod n bewirkt, wenn dies auch mod p_i für $i = 1, 2 \dots r$ geschieht. Dafür ist nach der Theorie der Potenzreste bekanntlich notwendig und hinreichend, daß der größte gemeinsame Teiler $\{k, \varphi(p_i)\} = 1$ ist. Daher repräsentieren genau die Polynome x^k ein Element aus $\mathfrak{P}_n$, welche die Bedingung: $\{k, \varphi(n)\} = 1$ erfüllen.

Nun ist aber, wie leicht einzusehen, $\{k, \varphi(n)\} = 1$ gleichbedeutend mit $\{k, [p_i - 1]\} = 1$, und daraus erkennt man, daß man ein genaues Repräsentantensystem für die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ erhält, wenn man in x^k den Exponenten k ein primes positives Restsystem mod $[p_i - 1]$ durchlaufen läßt. Da schließlich das Produkt der durch x^k und x^l repräsentierten Elemente aus $\mathfrak{P}_n$ repräsentiert wird durch x^{kl} , läßt sich folgender Satz aussprechen:

Satz I: Ist n nicht quadratfrei, so hat die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ die Ordnung 1. Ist aber $n = p_1 p_2 \dots p_r$ Produkt verschiedener Primzahlen, so ist $\mathfrak{P}_n$ isomorph zur primen Restklassengruppe mod $[p_i - 1]$.

§ 2. Es sei nun $n = a_1 a_2 \dots a_t$ eine Zerlegung der quadratfreien Zahl n in t (natürlich teilerfremde) positive Faktoren. Es ist dann⁵ die Gruppe $\mathfrak{G}_n$ isomorph zum abstrakt gebildeten direkten Produkt der Gruppen $\mathfrak{G}_{a_i}$; wir schreiben dafür:

⁴ Wir bezeichnen allgemein mit $[a_i]$ das kleinste gemeinsame Vielfache, mit $\{a_i\}$ den größten gemeinsamen Teiler endlich vieler Zahlen a_i .

⁵ Vgl. meine Arbeit in 1.

$$\mathfrak{G}_n \sim \prod_{\nu=1}^t \mathfrak{G}_{a_\nu}.$$

Wir können daher jedem Element $F \in \mathfrak{G}_n$ ein eindeutig bestimmtes t -Tupel

$$\bar{F} = (F^{(1)}, F^{(2)} \dots F^{(t)}) \text{ mit } F^{(\nu)} \in \mathfrak{G}_{a_\nu}$$

zuordnen. Da nun die Komponente $F^{(\nu)}$ von $\bar{F}$ in $\mathfrak{G}_{a_\nu}$ gegeben ist durch jenes Element von $\mathfrak{G}_{a_\nu}$, welches die Repräsentantenpolynome von $F \bmod A_{a_\nu}$ genommen — repräsentieren, so ergibt sich, daß mit $F \in \mathfrak{F}_n$ stets auch gilt: $F^{(\nu)} \in \mathfrak{P}_{a_\nu}$ für $\nu = 1, 2 \dots t$. Es ist daher $\mathfrak{F}_n$ isomorph zu einer Untergruppe $\mathfrak{P}$ des direkten Produktes

$$\mathfrak{D} = \prod_{\nu=1}^t \mathfrak{P}_{a_\nu}.$$

Um nun die Einbettung von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{D}$ näher zu untersuchen, führen wir zunächst folgende Bezeichnungsweise ein: Ist $a = \prod q_i$ die Primzahlzerlegung einer quadratfreien Zahl, so setzen wir: $[q_i - 1] = \bar{a}$.

Nun denken wir uns in $\mathfrak{D}$ jedes $\mathfrak{P}_{a_\nu}$ ersetzt durch die dazu isomorphe prime Restklassengruppe $\bar{\mathfrak{P}}_{a_\nu} \bmod \bar{a}_\nu$. Die $\bar{a}_\nu$ zerlegen wir alle in Primfaktoren:

$$\bar{a}_\nu = \prod_{i=1}^s q_i^{e_{i\nu}} \quad \nu = 1, 2 \dots t.$$

Wir bezeichnen die prime Restklassengruppe mod $q_i^{e_{i\nu}}$ mit $\mathfrak{Q}_i^\nu$, und wegen

$$\bar{\mathfrak{P}}_{a_\nu} \sim \prod_{i=1}^s \mathfrak{Q}_i^\nu$$

gilt:

$$\mathfrak{D} \sim \bar{\mathfrak{D}} = \prod_{\nu=1}^t \prod_{i=1}^s \mathfrak{Q}_i^\nu.$$

Durch Umordnung der Faktoren bringen wir schließlich $\bar{\mathfrak{D}}$ auf folgende Gestalt:

$$\bar{\mathfrak{D}} = \prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^t \mathfrak{Q}_i^{\nu_j} \text{ mit } e_{i\nu_j} \leq e_{i\nu_{j+1}i} \text{ für alle } i, j. \quad (1)$$

Dieser Formel entsprechend können wir jedes Element f von $\bar{\mathfrak{D}}$ folgendermaßen in Komponenten zerlegen:

$$f = (f_{11}, f_{12} \dots f_{1t}; f_{21}, f_{22} \dots f_{2t}; \dots f_{st}). \quad (2)$$

Bei der Abbildung von $\mathfrak{D}$ auf $\overline{\mathfrak{D}}$ wird $\mathfrak{P}$ auf eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{P}}$ von $\overline{\mathfrak{D}}$ abgebildet. Ist nun $F \in \mathfrak{P}_n$ und x^g Repräsentant von F , so ist x^g auch Repräsentant der Komponenten $F^{(\nu)}$ von $\overline{F}$; bei der Ersetzung der $\mathfrak{P}_{a_\nu}$ durch die $\overline{\mathfrak{P}}_{a_\nu}$ werden die $F^{(\nu)}$ dann ersetzt durch die Restklassen von $g \bmod \overline{a}_\nu$, und bei der direkten Produktzerlegung der $\overline{\mathfrak{P}}_{a_\nu}$ ist jede dieser Restklassen zu ersetzen durch das s -Tupel von Restklassen, das man erhält, wenn man $g \bmod q_i^{e_{i\nu}}$ für $i = 1, 2 \dots s$ nimmt. Man erhält also das Bild von F in $\overline{\mathfrak{P}}$, indem man in

$$f = (g, g \dots g; g, g \dots g; \dots g) \quad (3)$$

das g , von links beginnend, der Reihe nach durch die von ihm repräsentierten Elemente aus $\mathfrak{Q}_1^{n1}, \mathfrak{Q}_1^{n21}$ usw. ersetzt denkt.

Es ist nun wegen (1) stets eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{Q}_i^{jn}$ auf $\mathfrak{Q}_i^{j-1i}$ möglich (die man erhält, indem man die Repräsentanten eines jeden Elementes von $\mathfrak{Q}_i^{jn}$ als Repräsentanten eines Elementes von $\mathfrak{Q}_i^{j-1i}$ auffaßt) und aus (3) erkennt man: Die Komponentendarstellung (2) eines jeden Elementes von $\overline{\mathfrak{P}}$ ist so beschaffen, daß bei der homomorphen Abbildung $\mathfrak{Q}_i^{jn} \rightarrow \mathfrak{Q}_i^{j-1i}$ stets f_{ij} auf f_{ij-1} abgebildet wird.

Besitzt aber umgekehrt ein Element von $\overline{\mathfrak{D}}$ eine Komponentendarstellung (2) mit dieser Eigenschaft, und bilden die Zahlen g_{ij} ein Repräsentantensystem der Komponenten f_{ij} , so gilt:

$$g_{ij} \equiv g_{ij-1} \bmod q_i^{e_{ij-1i}} \text{ für } j = 2, 3 \dots t \text{ und jedes } i. \quad (4)$$

Bestimme ich die positive Zahl g aus dem Kongruenzsystem:

$$g \equiv g_{ii} \bmod q_i^{e_{i\nu i}} \quad i = 1, 2 \dots s, \quad (5)$$

so ist diese Zahl prim zu allen $\overline{a}_i$, daher auch prim zu $[\overline{a}_i] = \overline{n}$ und x^g repräsentiert ein Element aus $\mathfrak{P}_n$. Das Bild dieses Elementes in $\overline{\mathfrak{P}}$ ist aber wegen (5) und (4) gerade das Element von $\overline{\mathfrak{D}}$, von dem wir ausgegangen sind.

Wir haben damit folgenden Hilfssatz bewiesen: Unter den in der Komponentendarstellung (2) gegebenen Elementen von $\overline{\mathfrak{D}}$ sind die Elemente von $\mathfrak{P}$ dadurch charakterisiert, daß bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{Q}_i^{jn}$ auf $\mathfrak{Q}_i^{j-1i}$ stets f_{ij} auf f_{ij-1} abgebildet wird.

Wir ordnen nun jedem der in der Darstellung (2) gegebenen Elemente von $\overline{\mathfrak{D}}$ folgendes Element einer neuen Gruppe zu:

$$\tilde{f} = (f_{11}^{-1} \tilde{f}_{12}, f_{12}^{-1} \tilde{f}_{13} \dots f_{1t-1}^{-1} \tilde{f}_{1t}; f_{21}^{-1} \tilde{f}_{22}, \dots f_{st-1}^{-1} \tilde{f}_{st}), \quad (6)$$

wobei wir unter $\tilde{f}_{ij}$ das Bildelement von f_{ij} bei dem Homomorphismus

$\mathfrak{D}_i^{vji} \rightarrow \mathfrak{D}_i^{v_{j-1}i}$ verstehen. Wie wir sogleich beweisen werden, ist diese Zuordnung eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{D}$ auf die Gruppe:

$$\overline{\mathfrak{G}} = \prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^{t-1} \mathfrak{D}_i^{vji}.$$

Denn wie sofort ersichtlich ist, liegen die Elemente (6) tatsächlich alle in $\overline{\mathfrak{G}}$ und dem Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{D}$ ist stets das Produkt ihrer Bildelemente in $\overline{\mathfrak{G}}$ zugeordnet. Ist schließlich

$$\bar{h} = (h_{11}, h_{12} \dots h_{1t-1}; h_{21}, h_{22} \dots h_{2t-1}; h_{s1}, h_{s2} \dots h_{st-1}) \quad (7)$$

ein beliebiges Element aus $\overline{\mathfrak{G}}$, so bilde man zunächst zu jedem Element h_{ik} die Elemente $h_{ik}^{(u)} \in \mathfrak{D}_i^{v_{ui}}$ für $u = k, k+1 \dots t$ so, daß $h_{ik}^{(k)} = h_{ik}$ gilt und die übrigen $h_{ik}^{(u)}$ bei dem Homomorphismus $\mathfrak{D}_i^{v_{ui}} \rightarrow \mathfrak{D}_i^{v_{u-1}i}$ stets $h_{ik}^{(u-1)}$ als Bild haben. Nun bilde man folgendes Element von $\mathfrak{D}$:

$$h = (1, h_{11}^{(2)}, h_{11}^{(3)}, h_{11}^{(4)}, h_{12}^{(4)}, h_{13}^{(4)}, \dots, h_{11}^{(t)}, h_{12}^{(t)} \dots h_{1t-1}^{(t)}; 1, h_{21}^{(2)}, \dots) \quad (8)$$

Das Bild von h ist tatsächlich das beliebig vorgegebene Element $\bar{h}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$.

Bei dieser homomorphen Abbildung von $\mathfrak{D}$ auf $\overline{\mathfrak{G}}$ werden nun offenkundig gerade die Elemente von $\mathfrak{D}$ auf das Einheitsselement abgebildet, bei welchen stets gilt: $f_{ij} = f_{ij-1}$, nach dem vorhin bewiesenen Hilfssatz sind dies also genau die Elemente von $\mathfrak{P}$. Nach dem Homomorphiesatz ist daher die Faktorgruppe $\mathfrak{D} \mid \mathfrak{P}$, daher auch $\mathfrak{D} \mid \mathfrak{P}$ isomorph zu $\overline{\mathfrak{G}}$.

Wegen

$$\overline{\mathfrak{G}} = \prod_{i=1}^s \prod_{j=1}^{t-1} \mathfrak{D}_i^{vji} = \prod_{j=1}^{t-1} \prod_{i=1}^s \mathfrak{D}_i^{vji}$$

kann man $\overline{\mathfrak{G}}$ auch charakterisieren als das direkte Produkt der primen Restklassengruppen mod b_1 , mod $b_2, \dots$ mod b_{t-1} , wenn man zu den Zahlen $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_t$ neue Zahlen $b_1, b_2 \dots b_t$ nach

$$b_j = \prod_{i=1}^s q_i^{e_{ij}}$$

bildet, d. h. also, von jeder Primzahl die j -te unter den nach zunehmender Größe geordneten Potenzen dieser Primzahl nimmt, die in den Zerlegungen der $\bar{a}_i$ auftreten, und diese Primzahlpotenzen ausmultipliziert⁶.

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen in

⁶ Die Zahlen b_j bilden eine Verallgemeinerung von größtem gemeinsamen Teiler und kleinstem gemeinsamen Vielfachen. Es gilt ja stets:

$$b_1 = \{\bar{a}_i\}, b_t = [\bar{a}_i] \text{ und } \prod_{j=1}^t b_j = \prod_{i=1}^t \bar{a}_i; \text{ außerdem gilt stets: } b_j/b_{j+1}.$$

Satz II: $n = a_1 a_2 \dots a_t$ irgendeine Zerlegung der quadratfreien Zahl n in natürliche Zahlen und werden isomorphe Gruppen als gleich betrachtet, so gilt: $\mathfrak{P}_n$ ist Untergruppe des direkten Produktes $\mathfrak{D} = \prod_{v=1}^t \mathfrak{P}_{a_v}$ und für die Faktorgruppe gilt: $\mathfrak{D} \mid \mathfrak{P}_n = \prod_{v=1}^{t-1} \mathfrak{B}_v$; dabei ist $\mathfrak{B}_j$ die prime Restklassengruppe mod b_j und b_j wird aus den a_i folgendermaßen gewonnen: Man bilde zu jedem a_i die Zahl $\bar{a}_i$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches der φ -Funktionen ihrer Primteiler; diese $\bar{a}_i$ zerlege man alle in Primzahlpotenzen und nehme für b_j von jeder Primzahl q die j -te der in diesen Zerlegungen vorkommenden, nach zunehmender Größe geordneten Potenzen von q .

Spezialfall: Ist die Zerlegung von n gegeben durch $n = a_1 a_2$, so gilt stets:

$$\mathfrak{P}_{a_1} \times \mathfrak{P}_{a_2} \mid \mathfrak{P}_n = \mathfrak{B}_1$$

wobei $\mathfrak{B}_1$ die prime Restklassengruppe nach dem größten gemeinsamen Teiler $b_1 = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ ist.

Wir betrachten nun nochmals die zu $\mathfrak{P}_n$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{D}$ und denken uns die Elemente von $\mathfrak{P}$ der Produktdarstellung von $\mathfrak{D}$ entsprechend in Komponenten zerlegt:

$$P = (P_1, P_2 \dots P_t). \quad (9)$$

Wir beweisen nun: Durchläuft in (9) das P die Gruppe $\mathfrak{P}$, so durchläuft jedes P_v die Gruppe $\mathfrak{P}_{a_v}$ mindestens einmal.

Denn ist k prim zu $\bar{a}_v$, so bestimme man eine positive Zahl g mit

$$g \equiv k \pmod{\bar{a}_v} \text{ und } \{g, \bar{n}\} = 1.$$

Dies ist stets möglich, denn es gilt ja $\bar{a}_v \mid \bar{n}$ und in jeder primen Restklasse nach einer Zahl befinden sich auch zu jedem Vielfachen dieser Zahl prime positive Zahlen. Das Bildelement des durch x^g repräsentierten Elementes von $\mathfrak{P}_n$ in $\mathfrak{P}$ hat dann als Komponente $\mathfrak{P}_v$, das durch x^g in $\mathfrak{P}_{a_v}$ repräsentierte Element, das aber auch durch x^k repräsentiert wird.

Ordnet man nun jedem Element P von $\mathfrak{P}$ seine Komponente P_v in $\mathfrak{P}_{a_v}$ zu, so erhält man wieder eine homomorphe Abbildung und es ergibt sich:

Satz III: Ist n quadratfrei und gilt $m \mid n$, so ist $\mathfrak{P}_m$ stets homomorphes Bild von $\mathfrak{P}_n$.

§ 3. Wir wenden nun die bisherigen Ergebnisse an, um zwei spezielle

Fragen über die Struktur von $\mathfrak{P}_n$ zu untersuchen. Zunächst fragen wir uns: Für welche quadratfreien Zahlen n ist $\mathfrak{P}_n$ zyklisch?

Um dies festzustellen, setzen wir wie bisher $n = p_1 p_2 \dots p_r$; dann ist $\mathfrak{P}_n$ nach Satz I isomorph zur primen Restklassengruppe mod $\bar{n} = [p_i - 1]$. Wir haben also festzustellen, wann diese Gruppe zyklisch ist, oder nach bekannten Sätzen der Zahlentheorie, wann $\bar{n}$ einen der folgenden Werte annimmt:

$$1, 2, 4, q^e, 2q^e \quad (q \text{ ungerade Primzahl, } e \geq 1).$$

Wie nun leicht einzusehen, gilt:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= 1 \quad \text{für} \quad n = 2 \\ \bar{n} &= 2 \quad \text{für} \quad n = 3, 6 \\ \bar{n} &= 4 \quad \text{für} \quad n = 5, 10, 15, 30 \\ \bar{n} &= q^e \quad \text{für} \quad \text{kein } n. \end{aligned}$$

Damit $\bar{n} = 2q^e$ mit beliebigem natürlichen e erfüllt sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Primteiler p_i von n alle einen der folgenden Werte annehmen:

$$2, 3, 2q^k + 1 \text{ mit } k > 0,$$

dabei aber mindestens ein p_i der Form $2q^k + 1$ in n enthalten ist.

Wir erhalten also:

Satz IV: Die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ ist zyklisch für alle die quadratfreien Zahlen n der Gestalt:

$$n = 2^{\varepsilon_1} 3^{\varepsilon_2} p_1 p_2 \dots p_r \text{ mit } \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0 \text{ oder } 1 \text{ und } r \geq 0,$$

bei denen alle p_j durch eine feste, ungerade Primzahl q in der Gestalt $p_j = 2q^{k_j} + 1$ darstellbar sind, außerdem noch für $n = 5, 10, 15, 30$, aber für keine anderen n .

Spezialfall: Alle Primzahlen n , für die $\mathfrak{P}_n$ zyklisch ist, mit Ausnahme von 2 und 5, haben die Gestalt $n = 2q^k + 1$, wo q eine ungerade Primzahl und $k \geq 0$ ist. Mit Ausnahme von 5 gibt es also keine Primzahl der Gestalt $4m + 1$ mit zyklischem $\mathfrak{P}_n$.

Die zweite Frage lautet: Wie sind alle quadratfreien Zahlen n beschaffen, welche die Eigenschaft haben, daß bei jeder Faktorzerlegung von n :

$$n = a_1 a_2 \dots a_t$$

die Isomorphiebeziehung gilt:

$$\mathfrak{P}_n \sim \prod_{\nu=1}^t \mathfrak{P}_{a_\nu}.$$

Angenommen, es ist $n = p_1 p_2 \dots p_r$ die Primzahlzerlegung so einer Zahl, dann gilt auch:

$$\mathfrak{P}_n \sim \prod_{\nu=1}^r \mathfrak{P}_{p_\nu}.$$

Nach Satz II besteht daher die für die Primzahlzerlegung von n gebildete Gruppe $\prod_{\nu=1}^{r-1} \mathfrak{B}_\nu$ nur aus dem Einheitselement, es hat also auch die Gruppe $\mathfrak{B}_{r-1}$ die Ordnung 1. Daher gilt für das zu den $p_\nu - 1$ ($\nu = 1, 2 \dots r$) gebildete b_{r-1} die Beziehung $\varphi(b_{r-1}) = 1$, also

$$b_{r-1} = 1 \text{ oder } 2 \quad (10)$$

Setzt man die Primzahlzerlegung der $p_\nu - 1$ in der Gestalt an:

$$p_\nu - 1 = 2^{e_\nu} \prod_{i=1}^s q_i^{e_{i\nu}}$$

und bezeichnet man die zweite von endlich vielen, nach abnehmender Größe geordneten Zahlen u_i mit $\sec(u_i)$, so muß also gelten:

$$b_{r-1} = 2^{\sec(e_\nu)} \prod_{i=1}^s q_i^{\sec(e_{i\nu})} = 1 \text{ oder } 2$$

also auch

$$\sec(e_\nu) \leq 1 \quad \sec(e_{i\nu}) = 0 \quad (11)$$

Das heißt also, es darf jede ungerade Primzahl in höchstens einer der Primfaktorzerlegungen der $p_\nu - 1$ vorkommen und die Primzahl 2 in höchstens einer Zerlegung zu einer höheren Potenz als der ersten.

Ist umgekehrt n eine quadratfreie Zahl von dieser Beschaffenheit, gilt also (11), dann gilt auch (10), wegen $b_j \mid b_{j+1}$ gilt daher

$$\varphi(b_j) = 1 \text{ für } j = 1, 2 \dots r - 1$$

und daher auch

$$\mathfrak{P}_n \sim \prod_{\nu=1}^r \mathfrak{P}_{p_\nu}.$$

Da nun mit n auch jeder Teiler von n die Beziehung (11) erfüllt, folgt weiter, wenn

$$n = a_1 a_2 \dots a_t = (p_1 p_2 \dots p_u) (p_{u+1} \dots p_v) \dots$$

irgendeine Faktorzerlegung von n ist:

$$\prod_{\nu=1}^t \mathfrak{P}_{a_\nu} \sim (\mathfrak{P}_{p_1} \times \mathfrak{P}_{p_2} \times \dots \times \mathfrak{P}_{p_u}) \times (\mathfrak{P}_{p_{u+1}} \times \dots \times \mathfrak{P}_{p_v}) \times \dots = \prod_{\nu=1}^r \mathfrak{P}_{p_\nu} \sim \mathfrak{P}_n$$

Damit ist bewiesen:

Satz V: Alle quadratfreien Zahlen $n = p_1 p_2 \dots p_r$ mit der Eigenschaft, daß für jede Faktorzerlegung $n = a_1 a_2 \dots a_t$ die Isomorphiebeziehung gilt:

$$\mathfrak{P}_n \sim \prod_{\nu=1}^t \mathfrak{P}_{a_\nu}$$

sind charakterisiert dadurch, daß in den Primzahlzerlegungen der φ -Funktionen ihrer Primteiler jede ungerade Primzahl höchstens einmal auftritt und höchstens eine dieser φ -Funktionen durch 4 teilbar ist.

Eine Untersuchung der zusammengesetzten quadratfreien Zahlen zwischen 1 und 100 ergibt, daß diese Bedingung nicht erfüllt wird von 65, 85, 91.

§ 4. Den Ausgangspunkt der Überlegungen dieses Abschnitts bildet folgende Frage: Gegeben sei eine Anzahl von verschiedenen Polynomen der Gestalt x^k , etwa die Polynome x^{k_ν} für $\nu = 1, 2 \dots r$ mit $r \geq 2$. Gibt es Zahlen n , für welche diese Polynome die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ repräsentieren, wie groß ist ihre Anzahl und wie findet man sie?

Zunächst ergibt sich aus Satz I: Notwendig und hinreichend dafür, daß $\mathfrak{P}_n$ von den x^{k_ν} für die Zahl n repräsentiert wird, ist, daß die k_ν ein primes Restsystem mod $\tilde{n}$ bilden. Will man also alle n auffinden, für welche $\mathfrak{P}_n$ repräsentiert wird, so hat man zunächst alle natürlichen Zahlen m zu suchen, für die die k_ν ein primes Restsystem bilden, und dann zu jedem dieser m alle quadratfreien n mit $\tilde{n} = m$ zu bestimmen; es kann natürlich auch der Fall eintreten, daß es überhaupt keine Zahl m gibt und damit auch keine Zahl n , für welche $\mathfrak{P}_n$ repräsentiert wird.

Wir wollen nun die Anzahl dieser natürlichen Zahlen n näher untersuchen. Zuerst stellen wir fest, daß es eine nur von der Anzahl r der k_ν abhängige Schranke für die m gibt, für welche die k_ν ein primes Restsystem bilden.

Denn diese m müssen notwendigerweise alle die Gleichung $\varphi(m) = r$ erfüllen. Daraus folgt: Bildet man das kleinstmögliche, mit 2 beginnende Produkt a von aufeinanderfolgenden Primzahlen

$$a = 2.3.5 \dots p_t = \prod_{\mu=1}^t p_\mu, \quad (12)$$

das die Gleichung $\varphi(a) \geq r$ erfüllt, so gilt für alle m die Beziehung

$$m \leq a. \text{ Ist nämlich } a = \prod_{\mu=1}^t p_\mu, \text{ so ist } \varphi(a) = \prod_{\mu=1}^t (p_\mu - 1) = a \prod_{\mu=1}^t \left(1 - \frac{1}{p_\mu}\right).$$

Es sei weiter $w > a$ und $w = \prod_{\mu=1}^s q_\mu^{e_\mu}$ die Primfaktorzerlegung von w ;

sie sei so geordnet, daß $q_j < q_{j+1}$ stets erfüllt sei. Ist nun $s > t$, so gilt: $\varphi(w) = \prod_{\mu=1}^s q_{\mu}^{e_{\mu}-1} (q_{\mu} - 1)$ und es ist $\prod_{\mu=1}^s (q_{\mu} - 1) > \prod_{\mu=1}^t (p_{\mu} - 1)$ wegen $q_{\mu} \geq p_{\mu}$ für $\mu = 1, 2 \dots t$, also $\varphi(w) > r$. Ist aber $s \leq t$, so gilt: $\varphi(w) = w \prod_{\mu=1}^s (1 - \frac{1}{q_{\mu}})$ und da wir wegen $q_{\mu} \geq p_{\mu}$ für $\mu \leq s$ und wegen $t \geq s$ stets haben: $\prod_{\mu=1}^s (1 - \frac{1}{q_{\mu}}) \geq \prod_{\mu=1}^t (1 - \frac{1}{p_{\mu}})$, so gilt auch hier $\varphi(w) > r$.

Dann betrachten wir die Lösungszahl der Gleichung $\bar{n} = m$ bei festem m . Ist die quadratfreie Zahl n mit der Primzahlzerlegung $n = q_1 q_2 \dots q_r$ Lösung dieser Gleichung, gilt also: $[q_i - 1] = m$, so gilt auch $q_i = d_i + 1$ mit $d_i \mid m$ für $i = 1, 2 \dots r$. Wir bezeichnen die Anzahl der Primzahlen, die man erhält, wenn man in $d + 1$ das d alle Teiler von m durchlaufen läßt, mit $\omega(m)$, und die Lösungszahl von $\bar{n} = m$ bei festem m mit $\varrho(m)$; außerdem setzen wir noch fest: $\bar{1} = 1$. Es besteht dann zwischen den zahlentheoretischen Funktionen $\omega(m)$ und $\varrho(m)$ die Gleichung

$$\sum_{d \mid m} \varrho(d) = 2^{\omega(m)} \quad (13)$$

Denn in der Summe links werden sämtliche quadratfreien Zahlen u gezählt, die sich nur aus Primzahlen der Gestalt $d + 1$ mit $d \mid m$ zusammensetzen (für jede von ihnen gilt ja $\bar{u} \mid m$), außerdem noch die Zahl 1, aber keine weiteren Zahlen. Die Anzahl aller dieser Zahlen beträgt aber gerade $2^{\omega(m)}$.

Es gilt daher nach der Möbius'schen Formel auch:

$$\varrho(m) = \sum_{d^* \mid m} \mu(d^*) 2^{\omega(m/d^*)} \quad (14)$$

wobei d^* alle quadratfreien Teiler von m durchläuft. Damit ist die Berechnung von $\varrho(m)$ auf die Berechnung von $\omega(m)$ zurückgeführt. Dieser Funktion dürfte allerdings schwer beizukommen sein, wie schon die Betrachtung von $\omega(2^e)$ lehrt.

Über $\varrho(m)$ läßt sich noch folgende allgemeine Aussage machen: Es gilt $\varrho(1) = \varrho(2) = 2$, für alle anderen ungeraden m gilt $\varrho(m) = 0$, für alle anderen geraden m gilt $\varrho(m) \equiv 0 \pmod{4}$.

Beweis: Für ungerades m ist stets $\omega(m) = 1$, da 2 die einzige gerade Primzahl ist, daher wird die Gleichung $\bar{n} = m$ für $m = 1$ außer durch 1 nur durch 2 erfüllt, für $m \neq 1$ aber von gar keiner Zahl. Die Gleichung

$\bar{n} = 2$ ist erfüllt durch 3 und 6. Ist aber $m \neq 2$ und gerade und $\varrho(m) \neq 0$, also tatsächlich mindestens ein quadratfreies n mit $\bar{n} = m$ vorhanden — seine Primfaktorzerlegung sei gegeben durch

$$n = 2^{\varepsilon_1} 3^{\varepsilon_2} p_1 \dots p_r \text{ mit } \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0 \text{ oder } 1 \text{ und } r > 0, \quad (15)$$

so daß also gilt

$$m = [2^{\varepsilon_1}, p_1 - 1, \dots, p_r - 1] \quad (16)$$

— so sind, da die rechte Seite von (16) von ε_1 und ε_2 unabhängig ist, ersichtlich alle vier Zahlen Lösung von $\bar{n} = m$, die man erhält, wenn man in (15) das ε_1 und ε_2 unabhängig voneinander die Werte 0 und 1 annehmen läßt. Man kann also alle Lösungen der Gleichung zu je vieren zusammenfassen.

Übrigens läßt sich auch sofort eine Schranke für die Lösungen von $\bar{n} = m$ angeben. Ersichtlich gilt ja für jede Lösung:

$$n \leq \prod_{d|m} (d + 1) \leq (m + 1)!$$

Daraus folgt auf Grund der vorhergehenden Ergebnisse, daß alle n , für welche die r gegebenen Potenzen von x die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ repräsentieren, höchstens den Wert $(a + 1)!$ haben können, wo a durch (12) gegeben ist. Somit können wir zusammenfassend sagen:

Satz VI: Zu r verschiedenen Polynomen der Gestalt x^k existieren stets nur endlich viele n , für welche diese x^k die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ repräsentieren. Alle diese n haben höchstens den Wert $(a + 1)!$, wenn a nach folgender Vorschrift gebildet wird: Man multipliziere, mit 2 beginnend, soviele aufeinanderfolgende Primzahlen, bis das Produkt $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \dots$ die Bedingung $\varphi(a) \geq r$ erfüllt.

Numerisches Beispiel: Wir stellen fest, für welche n die Polynome x, x^7, x^{23}, x^{29} die Gruppe $\mathfrak{P}_n$ repräsentieren. Da haben wir zunächst alle Lösungen von $\varphi(m) = 4$ zu bestimmen und erhalten dabei $m = 5, 8, 10, 12$. Von den Exponenten unserer Polynome wird für folgende dieser m ein primes Restsystem repräsentiert: 5, 10, 12. Wegen $\varrho(5) = 0$ haben wir also jetzt noch alle Lösungen von $\bar{n} = 10$ und $\bar{n} = 12$ zu bestimmen. Die erste Gleichung ergibt die Lösungen $n = 11, 22, 33, 66$; die zweite hat als Lösungen $n = 13, 26, 35, 39, 65, 70, 78, 91, 105, 130, 182, 195, 210, 273, 390, 455, 546, 910, 1365, 2370$. Die vier $\mathfrak{P}_n$ zu $\bar{n} = 10$ sind vom Typus (4), die anderen $\mathfrak{P}_n$ vom Typus (2, 2).

Zum Schluß geben wir noch eine Wertetabelle von $\omega(m)$ und $\varrho(m)$ für $m \leq 102$:

m	$\omega(m)$	$\varrho(m)$	m	$\omega(m)$	$\varrho(m)$	m	$\omega(m)$	$\varrho(m)$
2	2	2	36	7	88	70	4	8
4	3	4	38	2	0	72	8	128
6	3	4	40	5	16	74	2	0
8	3	0	42	4	8	76	3	0
10	3	4	44	4	4	78	4	8
12	5	20	46	3	4	80	6	24
14	2	0	48	6	24	82	3	4
16	4	8	50	3	0	84	7	84
18	4	8	52	4	8	86	2	0
20	4	4	54	4	0	88	5	16
22	3	4	56	4	0	90	6	24
24	5	0	58	3	4	92	4	4
26	2	0	60	8	196	94	2	0
28	4	8	62	2	0	96	7	64
30	5	20	64	4	0	98	2	0
32	4	0	66	5	20	100	5	16
34	2	0	68	3	0	102	4	8

Über Trochoidenschraublinien und die durch Trochoidenschraubung erzeugbaren Kreisschraubflächen.¹

Von

H. Horninger, Istanbul.

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingelangt am 11. Juni 1954.)

Die nachstehenden Untersuchungen beruhen auf dem Grundgedanken, die zur Erzeugung einer ebenen Trochoide k' führende Bewegung eines Gelenkparallelogramms $\mathfrak{P}$ derart zu verallgemeinern, daß man drei Ecken von $\mathfrak{P}$ auf zwei Euklidischen Schraublinien und deren gemeinsamer Achse f führt, wobei die Ebene von $\mathfrak{P}$ stets zu f normal bleibt; die von der vierten Ecke durchlaufene Bahnkurve k bezeichne ich als *Trochoidenschraublinie*. Ebenso wie sich k' durch zwei verschiedene Kreisrollungen $\mathfrak{I}_1'$, $\mathfrak{I}_2'$ erzeugen läßt, kann k durch zwei verschiedene Zylinderschrotungen $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ gewonnen werden, die *Trochoidenschraubungen* genannt werden mögen. Da sich diese Bewegungen durch Zusammensetzung je einer Drehung mit einer proportionalen Euklidischen Schraubung darstellen lassen, so können sie als spezielle Helikoidenbewegungen gelten²; in den folgenden Zeilen werden indessen hauptsächlich die Eigenschaften der Trochoidenschraubungen beschrieben, die sich nicht durch Spezialisierung bekannter Eigenschaften von Helikoidenbewegungen allgemeiner Art ableiten lassen. Diese Beziehungen hängen im Wesentlichen mit der erwähnten *doppelten Erzeugbarkeit* von k zusammen, so z. B. die Darstellung des Aufrisses von k mittels Überlagerung zweier koachsialer Sinuslinien, eine äußerst einfache Tangentenkonstruktion, die die Drehfluchtlinien der Tangentenfläche von k als Bahnkurven von $\mathfrak{I}_1'$ bzw. $\mathfrak{I}_2'$ zeigt, Inzidenz der Trochoidenschraublinien mit koachsialen Dreh- und Schraubflächen,

¹ Einige der hier angeführten Ergebnisse habe ich anlässlich des III. Österreichischen Mathematikerkongresses in Salzburg, Sept. 1952 mitgeteilt.

² Über solche Bewegungen vgl. F. Hohenberg, Über die Zusammensetzung zweier gleichförmigen Schraubungen (Mh. f. Math., Bd. 54, Heft 3, Jg. 1950).

Paarung zu konjugierten Kurvenscharen und Definition von Hyperboloiden, deren beide Geradenscharen einander konjugierte Trochoidenschraublinien berühren usw.; einige dieser Eigenschaften habe ich bereits in meinem in türkischer Sprache erschienenen Lehrbuch über die Darstellung von Bewegungen angegeben³. Ebenso wie durch die an anderer Stelle beschriebenen *Evolventenschraubungen* einige neue Erkenntnisse über *Regelschraubflächen* gewonnen werden⁴, gelingt es durch Betrachtung der *Trochoidenschraubungen*, neue Eigentümlichkeiten der *geraden Kreisschraubflächen* aufzudecken oder bekannte Eigenschaften dieser Flächen in neuem Licht erscheinen zu lassen; dies tritt insbesondere am Beispiel der Kreisschraubfläche, die ihre Achse enthält, klar hervor. Über Regelschraubflächen und zyklische Schraubflächen, die durch Trochoidenschraubung erzeugbar sind, berichte ich an anderer Stelle.

Nr. 1. Definition der Trochoidenschraublinien und Trochoidenschraubungen.

Wenn ein Gelenkparallelogramm $\mathfrak{P} = FAPB$ derart geführt wird daß seine Seiten $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ zwei koachsiale Wendelflächen ω_1 , ω_2 durchlaufen, so bewegt sich die mit jenen Seiten nicht inzidente Ecke P des Parallelogramms auf einer transzendenten Raumkurve k , die *Trochoidenschraublinie* genannt werden soll. Die P gegenüberliegende Ecke F durchläuft die gemeinsame Achse f von ω_1 , ω_2 ; die Punkte A , B beschreiben je eine auf ω_1 , bzw. ω_2 liegende Schraublinie l_1 bzw. l_2 , deren jede als eine *Leitlinie* von k definiert sei. Die Parameter p_1 , p_2 von l_1 , l_2 legen das *Parameterpaar*, die Seitenlängen $e_1 = \overline{FA}$ bzw. $e_2 = \overline{FB}$ von $\mathfrak{P}$ das *Radienpaar* von k fest.

Die Bewegung von $\mathfrak{P}$ erscheint im Normalriß auf die zu f normale Ebene π_1 (Grundrißebene) als die bekannte Bewegung eines Gelenkparallelogramms $\mathfrak{P}'$, bei der die Ecken A' , B' von $\mathfrak{P}'$ die konzentrischen Kreise l'_1 , l'_2 mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten durchlaufen, bei der sich als Bahn von P' (d. h. als Grundriß von k) demnach eine *ebene Trochoide* k' ergibt. Der Aufriß jeder Lage $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{P}$ ist eine horizontale Strecke; aus der Vektorgleichung

³ H. Horninger: Tasari Geometri, Cild III, Istanbul Teknik Üniversitesi, 1950; § 23.

⁴ H. Horninger: Über eine Evolventenschraubung; Istanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Mecmuası, Seri A, Cilt XVI, Sayı 4 (1951).

$$\overrightarrow{F_i'' P_i''} = \overrightarrow{F_i'' A_i''} + \overrightarrow{F_i'' B_i''} \quad (1)$$

liest man ab, daß sich der Aufriß k'' von k durch „Summierung“ (Überlagerung) der Sinuslinien l_1'' , l_2'' darstellen läßt, die die Aufrisse von l_1 , l_2 sind. Die k bestimmenden Werte (p_1, p_2) , (e_1, e_2) legen Wellenlänge und Schwingungsweite beider Sinuslinien fest; k'' sei kurz *Bi-Sinuslinie* genannt. Falls das Verhältnis $p_1 : p_2$ rational vorausgesetzt wird, ist k' algebraisch, die Kurven k , k'' sind transzendent, aber periodisch; die Periodenlänge ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Ganghöhen von l_1 und l_2 . Wenn k' gespitzt ist, so besitzt k in den Punkten, deren Grundrisse die Spitzen von k' sind, vertikale Tangenten; Kurven dieser Art mögen *singulär*, alle übrigen Trochoidenschraublinien *regulär* heißen.

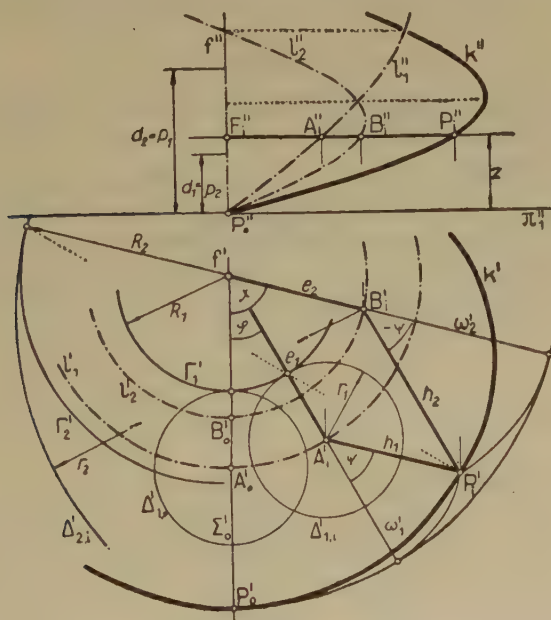


Abb. 1.

Wählt man als Anfangslage von P den auf der Symmetrieachse $\Sigma'_0 = [A'_0 B'_0]$ von k' befindlichen Punkt $P_0 = P'_0$ dieser Kurve, so läßt sich die Höhe z von P_i mittels der Winkel $\varphi = A'_0 \hat{f}' A'_i$ und $\chi = B'_0 \hat{f}' B'_i$ durch Gleichung

$$z = p_1 \varphi = p_2 \chi \quad (2)$$

ausdrücken. P_i ergibt sich demnach, wenn $A_0 P_0$ auf ω_1 in die durch

den Grundrißwinkel φ bestimmte Lage gebracht und die so gewonnene Strecke um die Gerade $a_i = A_i // f$ durch den Winkel $\psi = \chi - \varphi$ gedreht wird bzw. indem man $B_0 P_0$ auf ω_2 in die zum Grundrißwinkel χ gehörige Lage bringt und die hiedurch erhaltene Strecke um $b_i = B_i // f$ durch den Winkel $-\psi$ dreht. Bezeichnet man jede in dieser Weise durch Vereinigung einer Euklidischen Schraubung und einer zu dieser proportionalen Drehung entstehende Bewegung als *Trochoidenschraubung*, so erkennt man: Jede Trochoidenschraublinie k ist gemeinsame Bahnkurve zweier koaxialer Trochoidenschraubungen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$; die eine Bewegung ist durch die Leitlinie l_1 und das Parameterverhältnis

$$v_1 = p_2 : p_1 \quad (3, a)$$

bestimmt, die andere durch l_2 und das Parameterverhältnis

$$v_2 = p_1 : p_2 = 1 : v_1. \quad (3, b)$$

Wir bezeichnen p_1 (bzw. p_2) als *Leitparameter* und e_1 (bzw. e_2) als *Leitradius* von $\mathfrak{T}_1$ (bzw. $\mathfrak{T}_2$):

Die Grundrißbewegungen $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2'$ sind ersichtlich die beiden Kreisrollungen, durch die k' erzeugbar ist. Die Polflächen I_1', Δ_1 bzw. I_2', Δ_2 von $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ sind daher die mit den Polkreisen Γ_1', Δ_1' bzw. Γ_2', Δ_2' von $\mathfrak{T}_1', \mathfrak{T}_2'$ inzidenten *Drehzylinder*. Definiert man die Radien R_1, r_1 bzw. R_2, r_2 der Zylinder durch die Gleichungen

$$(4, a) \quad R_1 + r_1 = e_1 \quad \text{bzw.} \quad R_2 + r_2 = e_2 \quad (4, b)$$

$$(5, a) \quad r_1 : R_1 = \varphi : \psi = \mu_1 \quad \text{bzw.} \quad r_2 : R_2 = \chi : (-\psi) = \mu_2 \quad (5, b)$$

so lassen sie sich aus e_1, v_1 bzw. e_2, v_2 mittels der Gleichungen

$$(6, a) \quad r_1 = v_1 e_1 \quad \text{bzw.} \quad r_2 = v_2 e_2 \quad (6, b)$$

$$(7, a) \quad R_1 = (1 - v_1) e_1 \quad \text{bzw.} \quad R_2 = (1 - v_2) e_2 \quad (7, b)$$

ausdrücken. Bezeichnet man ferner die Strecken $\overline{AP}, \overline{BP}$ als *Bahnradien* h_1, h_2 von k in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$ bzw. $\mathfrak{T}_2$, so gewinnt man wegen $h_1 = e_2$ und $h_2 = e_1$ die Formeln

$$(8, a) \quad r_1 = \frac{e_2 h_2}{r_2} = h_2 : v_2 \quad \text{bzw.} \quad r_2 = \frac{e_1 h_1}{r_1} = h_1 : v_1 \quad (8, b)$$

$$(9, a) \quad R_1 = -\frac{R_2 h_2}{r_2} = -h_2 : \mu_2 \quad \text{bzw.} \quad R_2 = -\frac{R_1 h_1}{r_1} = -h_1 : \mu_1 \quad (9, b)$$

die die Abhängigkeit der Radienpaare der einen Bewegung von den Bestimmungselementen der zweiten angeben⁵.

Bei der Bewegung $\mathfrak{T}_1$ schroet der Zylinder Δ_1 derart auf Γ'_1 , daß der Punkt A seiner Achse a die Schraublinie l_1 , jeder weitere Punkt von a daher eine mit l_1 kongruente Schraublinie durchläuft. Hieraus folgt, daß alle berührenden Schraubungen von $\mathfrak{T}_1$ einen und denselben, im Folgenden kurz als *Drall* von $\mathfrak{T}_1$ bezeichneten Parameter d_1 besitzen, der sich mit Hilfe der Steigung $d_1 : r_1 = p_1 : e_1$ von l_1 durch Gl.

$$d_1 = \frac{p_1 r_1}{e_1} = v_1 p_1 \quad (10, a)$$

darstellen läßt⁶. Für den Drall d_2 von $\mathfrak{T}_2$ ergibt sich der analoge Wert

$$d_2 = \frac{p_2 r_2}{e_2} = v_2 p_2 \quad (10, b)$$

woraus mit Rücksicht auf Gl. 3a, b die einfache Beziehung

$$(11, a) \quad d_1 = p_2 \quad \text{bzw.} \quad d_2 = p_1 \quad (11, b)$$

folgt. D. h. *Haben zwei Trochoidenschraubungen eine Bahnkurve gemeinsam, so ist der Drall der einen Bewegung gleich dem Leitparameter der anderen.* Betrachtet man $\mathfrak{T}_1$ durch l_1 und d_1 gegeben, so läßt sich v_1 sowie das Radienpaar der Polzylinder von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ durch Anwendung der obigen Gleichungen mittels nachstehender Formeln ausdrücken (rechts die analogen Werte für die korrespondierende Bewegung):

$$(12, a) \quad v_1 = d_1 : p_1 \quad \text{bzw.} \quad v_2 = d_2 : p_2 \quad (12, b)$$

⁵ Die vorstehenden Gleichungen decken sich im Wesentlichen mit den bekannten Formeln der ebenen Kreisrollungen (vgl. z. B. *G. Loria*: Ebene Kurven, Leipzig 1902, Nr. 204); die von der üblichen Art abweichende Vorzeichenfestsetzung ermöglicht den völlig gleichartigen Aufbau der $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bestimmenden Formelsysteme. μ_1 (bzw. μ_2) stellt den *Modul* von $\mathfrak{T}_1'$ (bzw. $\mathfrak{T}_2'$) im Sinne der von *G. Loria*, a. a. O. gegebenen Definition dar; zwischen μ_1 , μ_2 besteht, wie z. B. den Gl. 6, 7 in Verbindung mit Gl. 3, b entnommen wird, die für die Bewegungen $\mathfrak{T}_1'$, $\mathfrak{T}_2'$ charakteristische Beziehung $\mu_1 + \mu_2 = -1$.

⁶ Dies zeigt, daß auch durch Zusammensetzung zweier *proportionaler Schraubungen* Trochoidenschraubungen entstehen, sofern die Achsen der Schraubungen zueinander parallel sind (über Bewegungen, die durch Vereinigung proportionaler Schraubungen entstehen, vgl. die in Fußn. 2 zit. Abh.). In der vorl. Abh. wird jedoch stets die im Text angegebene Definition einer derartigen Bewegung vorausgesetzt; die Eigenschaften von Trochoidenschraubungen, die mit der allgemeineren Definition in Zusammenhang stehen, sollen in einem anderen Aufsatz erörtert werden.

$$(13, a) \quad r_1 = \frac{d_1}{p_1} e_1 \quad \text{bzw.} \quad r_2 = \frac{d_2}{p_2} e_2 \quad (13, b)$$

$$(14, a) \quad R_1 = \frac{p_1 - d_1}{p_1} e_1 \quad \text{bzw.} \quad R_2 = \frac{p_2 - d_2}{p_2} e_2 \quad (14, b)$$

$$(15, a) \quad r_2 = \frac{p_1}{d_1} h_1 \quad \text{bzw.} \quad r_1 = \frac{p_2}{d_2} h_2 \quad (15, b)$$

$$(16, a) \quad R_2 = \frac{d_1 - p_1}{d_1} h_1 \quad \text{bzw.} \quad R_1 = \frac{d_2 - p_2}{d_2} h_2 \quad (16, b)$$

Nr. 2. Achsiale Streckung und Tangentenfläche einer Trochoidenschraublinie.

Betrachtet man die Achse f einer durch die Leitschraublinien l_{x1}, l_{x2} gegebenen Trochoidenschraublinie k_x als Achse einer (normalen) achsialen Streckung $\mathfrak{B}$, so geht das Gelenkparallelogramm $\mathfrak{P}_x = FA_xP_xB_x$, dessen Ecke P_x die Kurve k_x durchläuft, in ein mit $\mathfrak{P}_x$ zentrisch ähnliches Parallelogramm $\mathfrak{P}_y = FA_yP_yB_y$ über; der Streckungsfaktor ist $v = (P_yP_xF) = (A_yA_xF) = (B_yB_xF)$. Die Schraublinien l_{x1}, l_{x2} gehen durch die Streckung in zwei Schraublinien l_{y1}, l_{y2} über; l_{y1} gehört der mit l_{x1} inzidenten Wendelfläche ω_1 an, die f zur Achse hat; l_{y2} liegt auf der durch l_{x2} bestimmten, mit ω_1 koachsialen Wendelfläche ω_2 . Die Parameter beider Schraublinien sind demnach den Parametern p_1, p_2 von l_{x1}, l_{x2} gleich, ihre Radien sind den Radien von l_{x1}, l_{x2} proportional. Wird $\mathfrak{P}_y$ derart geführt, daß sich die Punkte A_y, B_y, F auf l_{y1}, l_{y2} bzw. f bewegen, so durchläuft P_y eine Trochoidenschraublinie k_y , die k_x in der Verwandtschaft $\mathfrak{B}$ zugeordnet ist. D. h.: *Wenn die Leitlinien l_{x1}, l_{x2} bzw. l_{y1}, l_{y2} zweier Trochoidenschraublinien k_x, k_y demselben Wendelflächenpaar ω_1, ω_2 angehören und die Radienverhältnisse von l_{x1}, l_{y1} bzw. l_{x2}, l_{y2} einander gleich sind, so lassen sich die Kurven k_x, k_y durch achsiale Streckung ineinander überführen.*

Betrachten wir ferner $l_1 = l_{x1}$ und $l_2 = l_{y2}$ als Leitlinien einer Trochoidenschraublinie k , so kann diese entweder mittels des von den Punkten $A = A_x, B = B_y$ und F aufgespannten Parallelogramms $\mathfrak{P} = FAPB$ als Bahn der Ecke P oder auch als gemeinsame Bahnkurve zweier Trochoidenschraubungen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ dargestellt werden, die l_1 bzw. l_2 zu je einer Leitlinie besitzen. Die Bahn k_x des auf der Geraden $g_x = [AP]$ befindlichen Punktes P_x erweist sich hiebei als eine Bahnlinie von $\mathfrak{T}_1$,

desgleichen k_y als Bahn von P_y bei $\mathfrak{T}_2$. Da je zwei einander in dieser Weise zugeordnete Punkte P_x, P_y auf den mit P inzidenten Geraden g_x, g_y eine

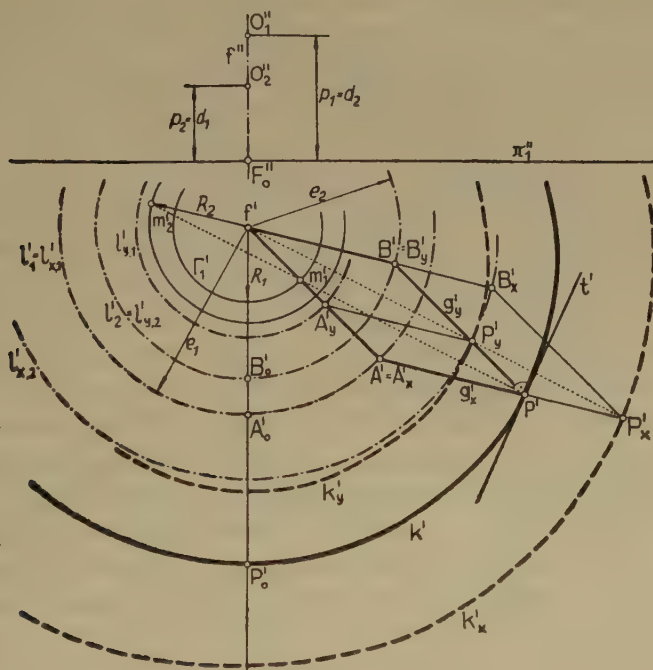


Abb. 2.

Perspektivität mit den Gegenpunkten A, B hervorrufen, so kann man sagen: Wird die gemeinsame Bahn k der Trochoidenschraubungen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ mittels des Gelenkparallelogramms $\mathfrak{P} = FAPB$ erzeugt, so lassen sich die Punkte P_x, P_y der Geraden $[AP], [BP]$ einander derart perspektivisch zuordnen, daß die von P_x durch $\mathfrak{T}_1$ hervorgerufene Bahn k_x der von P_y bei $\mathfrak{T}_2$ beschriebenen Bahn k_y in einer axialen Streckung mit dem Faktor $(P_xPA) = (PP_yB)$ entspricht.

Die in P vorhandene Tangente t von k wird mittels der berührenden Schraubungen $\mathfrak{S}_1$, bzw. $\mathfrak{S}_2$ von $\mathfrak{T}_1$ bzw. $\mathfrak{T}_2$ dargestellt. Bezeichnen m_1, m_2 die Achsen von $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ und d_1, d_2 die Drallwerte von $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$, so ist t durch den Grundriß $t' = P' \perp [P'm'_1m'_2]$ und die Steigung $d_1 : m'_1P' = d_2 : m'_2P'$ bestimmt. Werden die Leitparameter $p_1 = d_2$, bzw. $p_2 = d_1$ von $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ auf der Achse f von k vom Spurpunkt F_0 derselben aus aufgetragen, so erhält man zwei Punkte O_1, O_2 , die als die zu

π_1 gehörigen *Parameterpunkte* von $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ und k bezeichnet werden mögen. Der dem Abbildungszentrum O_1 zugeordnete *Drehfluchtpunkt* P'_x von t ergibt sich nach dem Gesagten, wenn man die Strecke $\overline{m'_1 P'}$ ($p_1 : d_1$) von f' aus auf der Geraden $f' // [P' m'_1 m'_2]$ sinnrichtig abträgt. Da der Quotient $p_1 : d_1$ wegen Gl. 10, a gleich $e_1 : r_1 = Af : Am_1$ ist, so deckt sich P'_x mit dem *Grundriß des Punktes* P_x von g_x , der in *Bezug auf A, P* das *Teilverhältnis* $(PP_x A) = v_1$ besitzt (vgl. Gl. 6, a). Analoge Beziehungen gelten für den zum Abbildungszentrum O_2 gehörigen *Drehfluchtpunkt* P'_y von t : Dieser läßt sich als *Grundriß* des auf g_y liegenden Punktes P_y darstellen, der mit B, P das *Teilverhältnis* $(PP_y B) = v_2$ bildet (s. Gl. 6, b). Da die Werte v_1, v_2 wegen Gl. 3, b reziprok sind, so entsprechen die Punkte P_x, P_y einander in einer *achsialen Streckung* mit dem Faktor v_1 bzw. v_2 . Die zu O_1, O_2 gehörigen *Drehfluchtlinien* der *Tangentenfläche* Θ von k sind also mit den *Grundrissen der Bahnkurven* k_x, k_y von P_x , bzw. P_y identisch. Somit gilt

Satz 1: Die zu jedem *Parameterpunkt* einer *Trochoidenschraublinie* k gehörige *Drehfluchtlinie* der *Tangentenfläche* von k ist der *Grundriß* einer *Trochoidenschraublinie* k_x (bzw. k_y), die durch dieselbe *Bewegung* $\mathfrak{L}_1$ (bzw. $\mathfrak{L}_2$) erzeugt wird wie k ⁷. Die Kurven k_x, k_y entsprechen einander in einer *achsialen Streckung*, deren Faktor dem *Parameterverhältnis* von $\mathfrak{L}_1$ oder $\mathfrak{L}_2$ gleich ist.

Die *Bahnradien* von k, k_x, k_y besitzen der Reihe nach die Werte $h_1 = e_2; h_2 = e_1$ bzw. $h_{x1} = r_2; h_{x2} = e_1$ und $h_{y1} = e_2; h_{y2} = r_1$ (s. Gl. 9a, b sowie Abb. 2). Im Falle $h_1 = r_1$ (oder $h_2 = r_2$) ist k' *gespitzt*, k ist *singulär* (s. oben); für h_{x1} folgt wegen Gl. 6, a der Wert e_1 (bzw. für h_{y2} wegen Gl. 6, b der Wert e_2), d. h. die *Bahnradien* von k_x und k_y sind (e_1, e_1) bzw. (e_2, e_2) . Die *Drehfluchtlinien* k'_x, k'_y von k enthalten daher ihre *Mitte* f' , sind also *Rosenkurven*⁸; die *Trochoidenschraublinien* k_x, k_y , deren *Grundrisse* sie sind, schneiden ihre *Achse* f . Die Annahme $h_1 = v_1 r_1$ (bzw. $h_2 = v_2 r_2$) führt auf $h_{x1} = r_1$ (bzw. $h_{y2} = r_2$); in diesem Fall sind also die *Kurven* k'_x, k'_y *gespitzt*. Die *Gestalt* dieser *Kurven* sowie der mit ihnen *kongruenten Fluchtlinien* von Θ wird somit im Wesentlichen davon beeinflußt, welchen Wert der *Bahnradius* h_1 von k im Verhältnis zu $v_1 r_1$ besitzt.

⁷ Über den analogen Zusammenhang bei *Evolventenschraublinien* s. d. Diss. meines Assistenten, Herrn Dr. Asaf V. Günhan: *Helisel evolvent hareketlerinin yörüngeleri hakkında* (Istanbul Teknik Üniversitesi, İnsaat Fakültesi, 1953).

⁸ Vgl. z. B. H. Wieleitner: *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig 1908), Nr. 171, 172.

Nr. 3. Konjugierte Trochoidenschraublinien und gerade Kreisschraubflächen.

Die mit den Leitlinien l_1, l_2 von k ungleichsinnig kongruenten Schraublinien $\bar{l}_1, \bar{l}_2$, die l_1, l_2 in der geraden Symmetrie bezüglich der Ebene $\Sigma_0 = [A_0 f]$ entsprechen, sind die Leitlinien einer mit k ungleichsinnig kongruenten Trochoidenschraublinie $\bar{k}$, die k bezüglich Σ_0 symmetrisch gegenüberliegt. Faßt man ferner $l_1, \bar{l}_2$ einerseits bzw. $\bar{l}_1, l_2$ andererseits als Leitlinienpaar je einer Trochoidenschraublinie $\bar{k}_1$ bzw. $\bar{k}_2$ auf, so erkennt man, daß auch diese beiden Kurven einander in der geraden Symmetrie bezüglich Σ_0 zugeordnet sind; wir bezeichnen sie als zu k oder $\bar{k}$ *konjugierte* Trochoidenschraublinien.

Denkt man $k, \bar{k}_1$ und $\bar{k}_2$ mittels je eines Gelenkparallelogramms erzeugt, dessen Anfangslage durch den Spurpunkt F_0 von f sowie die in Σ_0 befindlichen Punkte A_0, B_0 von l_1, l_2 bestimmt ist und bezeichnet die in gleicher Höhe befindlichen Punkte der genannten Kurven durch $P, \bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ bzw. A, B , so folgt aus der erwähnten Symmetriebeziehung unmittelbar: Die Punkte $P, \bar{P}_1$ liegen einander bezüglich der Ebene $\Sigma_a = A//\Sigma_0$ symmetrisch gegenüber, die Punkte $P, \bar{P}_2$ bezüglich $\Sigma_b = B//\Sigma_0$; die Kurven $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ sind also *relative Gegenpunktkurven* von k in Bezug auf das Büschel der zu Σ_0 parallelen Ebenen. Die Grundrisse von $k, \bar{k}_1$ und $\bar{k}_2$ besitzen die Gerade Σ'_0 zur gemeinsamen Symmetrieachse, aus der Kongruenz von $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ folgt daher, daß die Grundrisse $\bar{k}'_1, \bar{k}'_2$ beider Kurven *in einer einzigen Trochoide vereinigt* sind, die zugleich relative Gegenpunktkurve von k' bezüglich des Büschels der zu Σ'_0 parallelen Geraden ist. Die in der Ebene $\pi_2 = f \perp \Sigma_0$ befindlichen Aufrisse von $k, \bar{k}_1, \bar{k}_2$ sind die Bi-Sinuslinien $k'', \bar{k}_1'', \bar{k}_2''$, die durch Summierung der Sinuslinien l_1'', l_2'' bzw. l_1'', l_2'' und l_1'', l_2'' entstehen; die Kurven $\bar{k}_1'', \bar{k}_2''$ sind bezüglich f'' symmetrisch. Die in Σ_0 liegenden Kreuzrisse von $k, \bar{k}_1, \bar{k}_2$ sind *in einer einzigen Bi-Sinuslinie* $k''' = \bar{k}_{12}'''$ vereinigt, weil je drei gleich hoch liegende Punkte dieser Kurven einer zu Σ_0 normalen Geraden angehören.

Um die Kurven $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ auf direktem Weg (ohne Verwendung von k) darstellen zu können, muß man sie als Bahnkurven je einer Trochoidenschraubung $\mathfrak{T}_1$, bzw. $\mathfrak{T}_2$ definieren. Da die Leitradien und -parameter von $k, \bar{k}_1$ einseits bzw. $k, \bar{k}_2$ andererseits einander gleich bzw. entgegengesetzt gleich sind, so sind auch die Drallwerte und die Parameterverhältnisse von $\mathfrak{T}_1, \bar{\mathfrak{T}}_1$ einseits bzw. $\mathfrak{T}_2, \bar{\mathfrak{T}}_2$ andererseits entgegen-

gesetzt gleich; die Radien der Polzylinder von $\bar{\mathfrak{Z}}_1, \bar{\mathfrak{Z}}_2$ lassen sich demnach durch die Formeln

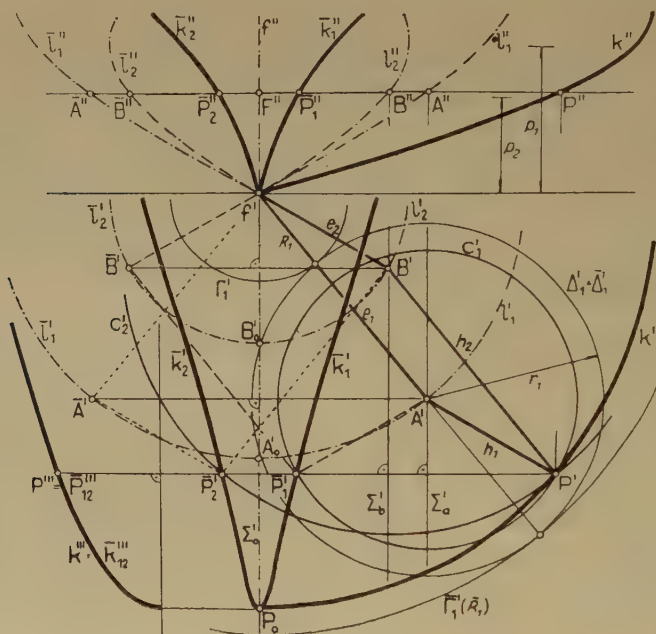


Abb. 3.

$$(17, a) \quad \bar{r}_1 = -r_1 \quad \text{bzw.} \quad \bar{r}_2 = -r_2 \quad (17, b)$$

$$(18, g) \quad \bar{R}_1 = (1 + v_1) e_1 \quad \text{bzw.} \quad \bar{R}_2 = (1 + v_2) e_2 \quad (18, b)$$

ausdrücken. D. h. Entsteht $\bar{\mathfrak{Z}}_1$ durch Außenschrotung des Zylinders Δ_1 auf Γ_1 , so entsteht die zu $\bar{\mathfrak{Z}}_1$ konjugierte Bewegung $\bar{\mathfrak{Z}}_1$ mittels Innenschrotung von $\bar{\Delta}_1 = \Delta_1$ auf dem mit Γ_1 koachsialen Drehzylinder $\bar{\Gamma}_1 (f; \bar{R}_1)$. Die Grundrisse der Bewegungen $\bar{\mathfrak{Z}}_1, \bar{\mathfrak{Z}}_2$ erweisen sich zugleich als die beiden Kreisrollungen $\bar{\mathfrak{Z}}_1', \bar{\mathfrak{Z}}_2'$, deren gemeinsame Bahn $\bar{k}_1' = \bar{k}_2'$ ist⁹. Nach Festlegung von $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Delta}_1$ können die Tangenten von $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ gemäß Nr. 2 bestimmt werden usw.

Denkt man Σ_0 durch eine beliebige Ebene Σ des Büschels f ersetzt, so bleiben die obigen Beziehungen im Wesentlichen ungeändert, jedoch

⁹ Zwischen den gemäß Fußn. 6 definierten Modulwerten $\mu_1, \bar{\mu}_1$ von $\bar{\mathfrak{Z}}_1', \bar{\mathfrak{Z}}_1'$ besteht die Beziehung $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\bar{\mu}_1} = -2$.

ist $\bar{k}_1' \neq \bar{k}_2'$. Die Gesamtheit der k in dieser Weise zugeordneten Kurven $\bar{k}_1^n, \bar{k}_2^n$ besteht aus zwei Scharen von je ∞^1 einander kongruenten Trochoidenschraublinien; die Leitlinien jeder Kurve $\bar{k}_1^n$ sind l_1 und eine mit l_2 ungleichsinnig kongruente Schraublinie $\bar{l}_2^n$, die von $\bar{k}_2^n$ sind eine mit $\bar{l}_1$ ungleichsinnig kongruente Kurve $\bar{l}_1^n$ und l_2 . Unterwirft man schließlich irgendeine Kurve $\bar{l}_1^n$ bzw. $\bar{l}_2^n$ der Symmetrie an allen Ebenen des Büschels f , so gewinnt man alle Schraublinien l_1^n, l_2^n , die mit l_1 bzw. l_2 durch Drehung um f zur Deckung gebracht werden können; jedes Kurvenpaar l_1^n, l_2 bzw. l_1, l_2^n legt eine mit k kongruente und zu $\bar{k}_1$ bzw. $\bar{k}_2$ konjugierte Trochoidenschraublinie k_1^n bzw. k_2^n fest.

Die mit P gleich hoch liegenden Punkte von $\bar{k}_1^n, \bar{k}_2^n$ bzw. k_1^n, k_2^n ergeben sich, wenn man P an allen Ebenen des Büschels a , bzw. b symmetrisch überträgt bzw. je einen dieser Punkte an den Ebenen desselben Büschels neuerdings spiegelt; d. h. alle diese Punkte gehören je einem der mit P inzidenten Kreise $c_1(a; h_1)$ oder $c_2(b; h_2)$ an. Die Kurven $k_1^n, \bar{k}_1^n$ liegen demnach auf der geraden Kreisschraubfläche Φ_1 , die l_1 zur Mittenlinie und c_1 zum Normalschnitt hat; die Kurven $k_2^n, \bar{k}_2^n$ gehören der mit Φ_1 koachsialen Schraubfläche Φ_2 an, deren Mittenlinie l_2 ist und die c_2 zum Normalschnitt besitzt. Die Parameter von Φ_1, Φ_2 sind den Parametern p_1, p_2 von l_1 bzw. l_2 gleich; die Radien h_1, h_2 der Kreise c_1, c_2 stimmen mit den Radien e_2, e_1 von l_2, l_1 überein. Da k sowohl in der Schar k_1^n , als auch in der Schar k_2^n enthalten ist, so kann man feststellen:

Satz 2: *Zwei koachsiale gerade Kreisschraubflächen von verschiedenen Parametern haben eine Trochoidenschraublinie gemeinsam, falls der Kreisschnitt jeder der beiden Flächen denselben Radius besitzt wie die Mitten-schraublinie der anderen Fläche.*

Der Restschnitt von Φ_1, Φ_2 ist i. a. eine transzendente Kurve anderer Art, in besonderen Fällen wird er zu einer Geraden (vgl. Nr. 6).

Φ_1 kann durch die Bewegungen $\mathfrak{T}_1, \bar{\mathfrak{T}}_1$ sowie durch jede der ∞^1 Trochoidenschraubungen, die l_1 zur Leitlinie haben, als Bahnfläche von c_1 erzeugt werden. Bei der Bewegung $\mathfrak{T}_1$ bilden die Kurven k_1^n die von den Punkten des Kreises beschriebenen Bahnen, die Kurven $\bar{k}_1^n$ dagegen eine Schar krummliniger Erzeugenden von Φ_1 ; jede Kurve dieser Schar wird durch $\mathfrak{T}_1$ in eine zweite Kurve derselben Schar übergeführt. Bei den von $\mathfrak{T}_1$ und $\bar{\mathfrak{T}}_1$ verschiedenen Trochoidenschraubungen, durch die Φ_1 erzeugbar ist, durchlaufen die Punkte von c_1 Bahnen, deren Gestalt vom Parameterverhältnis ν_1 der betreffenden Bewegung abhängt. Die

Gesamtheit dieser Kurven bildet auf Φ_1 eine *zweiparametrische Mannigfaltigkeit*¹⁰; je zwei durch entgegengesetzt gleiche Werte von v_1 definierte Bewegungen sowie die durch sie erzeugten Bahnkurven sind einander konjugiert. Die durch $v_1^0 = \pm h_1 : e_1$ bestimmten Trochoidenschraubungen sind dadurch ausgezeichnet, daß ihr bewegter Polzyylinder Δ_1^0 den Radius h_1 besitzt (s. Gl. 6, a), also den Kreis c_1 enthält; die Punkte von c_1 werden daher bei diesen zwei Bewegungen auf *singulären* Trochoidenschraublinien geführt. Alle auf Φ_1 befindlichen Trochoidenschraublinien bilden sich im Grundriß als die ∞^2 Trochoiden ab, die im Leitkreis l_1' und im Bahnradius h_1 übereinstimmen; ihre Aufrisse werden von den ∞^2 Bi-Sinuslinien gebildet, die aus der Sinuslinie l_1'' und den mit l_1'' koachsialen Sinuslinien von der Schwingungsweite h_1 ableitbar sind.

Nr. 4. Die Tangentenhyperboloide einer geraden Kreisschraubfläche.

Betrachten wir die Trochoidenschraubung $\mathfrak{T}_1$, deren Bahnfläche Φ_1 ist, durch ihre Leitlinie l_1 und ihren Drall d_1 gegeben, so kann die in irgendeinem Punkte P von c_1 vorhandene Tangente t der Bahn k von P auf die in Nr. 2 beschriebene Art festgelegt werden: Bezeichnet m die Achse der zu c_1 gehörigen berührenden Schraubung von $\mathfrak{T}_1$, so ist $t' = P' \perp [m' P']$, die Steigung von t besitzt den Wert $d_1 : m' P'$. Der Punkt T von t , dessen Höhe über der Ebene π_1 von c_1 gleich d_1 ist, erscheint daher im Grundriß als einer der Punkte T' , deren Abstand von P' gleich $m' P'$ ist. Der geometrische Ort der allen Punkten von c_1 in dieser Weise zugeordneten Punkte T ist der Kreis i der Ebene $\pi = T // \pi_1$, dessen Mitte S einer der Durchstoßpunkte des Polzyinders Δ_1 von $\mathfrak{T}_1$ mit der Geraden s ist, die l_1 in der Mitte A von c_1 berührt; der Radius von i ist gleich $h_1 \sqrt{2}$. Die Gesamtheit der Geraden t' bildet die Tangentenschar der zum Pol m' gehörigen negativen Fußpunkt-kurve von c_1' , d. h. je nach Lage von m' die Tangentenschar einer *Ellipse* oder *Hyperbel* u' mit dem Scheitelkreis c_1' und dem Brennpunkt m' . Hieraus folgt, daß die Gesamtheit der in allen Punkten von c_1 vorhandenen Bahntangenten der Bewegung $\mathfrak{T}_1$ eine Erzeugendenschar des *Hyperboloides* η erfüllen, das c_1 zu einem Durchmesserschnitt und u'

¹⁰ Daß jede Euklidische Schraubfläche, die durch eine Helikoidenbewegung erzeugbar ist, eine zweiparametrische Mannigfaltigkeit von Helikoiden trägt, wird in Nr. 3 der in Fußn. 2 zit. Abh. bewiesen.

zum ersten scheinbaren Umriß hat; s ist der zu π_1 konjugierte Durchmesser, m eine Fokalachse von η .

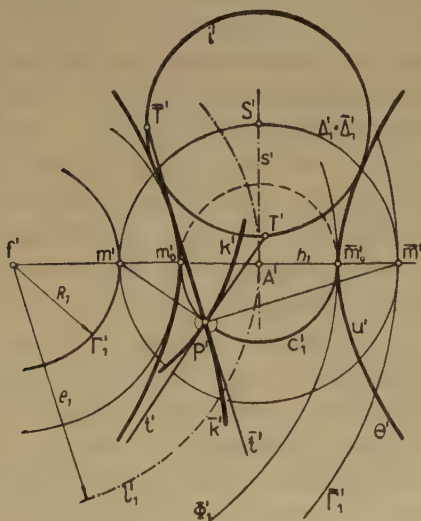


Abb. 4.

Betrachten wir für einen Augenblick die Fläche Φ , die c_1 bei der durch die Achse m und den Parameter d_1 bestimmten *Euklidischen Schraubung* beschreibt, so erweisen sich die genannten Erzeugenden von η als Tangenten der auf Φ liegenden *Euklidischen Schraublinien* und wir gewinnen

Satz 3: *Die auf einer geraden Kreisschraubfläche Φ befindlichen Euklidischen Schraublinien berühren in allen Punkten jedes Kreisschnittes von Φ die Erzeugenden einer Schar eines Hyperboloides¹¹.*

Setzen wir Φ_1 als Bahnfläche der zu $\mathfrak{L}_1$ konjugierten Bewegung $\bar{\mathfrak{L}}_1$ voraus, so sehen wir sogleich, daß die auf Φ_1 liegenden Bahnkurven von $\mathfrak{L}_1$ die Erzeugenden der zweiten Schar von η berühren! Die zu m bezüglich der Kreisachse a symmetrisch liegende Fokalachse von η ist die Achse $\bar{m}$ der zu c_1 gehörigen berührenden Schraubung von $\bar{\mathfrak{L}}_1$; die mit P inzidente Erzeugende $\bar{t}$ der erwähnten Schar durchsetzt die Ebene $\bar{\pi}$ in dem Punkte $\bar{T}$ von i , dessen Grundriß von P' den Abstand $\bar{m}' P'$ hat usw. Sieht man Φ_1 schließlich als Bahnfläche einer der beiden

¹¹ Dieser Umstand scheint bisher nur in dem Sonderfall bekannt zu sein, bei dem der Kreis c_1 die Achse von Φ schneidet (vgl. Nr. 6).

Trochoidenschraubungen an, deren Bahnkurven die auf Φ_1 liegenden *singulären* Trochoidenschraublinien sind, so folgt aus der in Nr. 3 bewiesenen Tatsache, daß der Polzylinder Δ_1^0 dieser Bewegungen mit c_1 inzident ist, unmittelbar, daß die Achsen $m_0, \bar{m}_0$ der berührenden Schraubungen dieser zwei Bewegungen dem Zylinder Δ_1^0 und daher auch dem zugehörigen Tangentenhyperboloid η^0 angehören, d. h. daß η^0 *orthogonal* ist. Wir gewinnen mithin

Satz 4: *Je zwei auf einer geraden Kreisschraubfläche Φ_1 befindliche Scharen einander konjugierter Trochoidenschraublinien berühren in den Punkten jedes Kreisschnittes von Φ_1 die beiden Geradenscharen eines Hyperboloides; das durch singuläre Trochoidenschraublinien bestimmte Tangentenhyperboloid ist orthogonal.*

Da die genannten Hyperboloide sämtlich dem schiefen Kreiszyylinder berührend umschrieben sind, dessen Erzeugende die zu s parallelen Treffgeraden von c_1 sind, so bilden sie ein *lineares Büschel*, ihre Erzeugenden erfüllen eine *algebraische Kongruenz* $\mathfrak{K}$ (2,2). Jeder Kongruenzstrahl legt ein Hyperboloid und damit eine bestimmte Trochoidenschraubung fest, die Φ_1 erzeugt. M. a. W.: *Die auf Φ_1 befindlichen Trochoidenschraublinien lassen sich den Strahlen der Kongruenz $\mathfrak{K}$ umkehrbar eindeutig zuordnen.*

Nr. 5. Die Ur-Schraublinien von k ; einander ergänzende Trochoidenschraublinien.

Bei der in Nr. 1 beschriebenen Darstellung der gemeinsamen Bahn k von $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ wird jeder Punkt P von k dadurch gewonnen, daß man den als Anfangslage von P gewählten Punkt P_0 zunächst einer Schraubung um f und hierauf einer Drehung um eine zu f parallele Gerade a , bzw. b unterwirft; zwischen den Grundrißwinkeln φ, ψ bzw. $\chi, -\psi$ dieser Bewegungen und den Radien R_1, r_1 bzw. R_2, r_2 der Polzylinder von $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ bestehen die Gl. 5a, b.

Betrachtet man die in der Ebene $\Sigma_0 = [P_0 f]$ liegenden Geraden $a_0 = A_0/f$ und $b_0 = B_0/f$ als Achsen je einer durch P_0 laufenden *Euklidischen Schraublinie* u_1 bzw. u_2 und wählt die Parameter q_1, q_2 beider Kurven derart, daß sie mit R_1, r_1 bzw. R_2, r_2 und den Parametern p_1, p_2 der Leitlinien l_1, l_2 von k durch Gl.

$$(19, a) \quad q_1 : p_1 = r_1 : R_1 \quad \text{bzw.} \quad q_2 : p_2 = r_2 : R_2 \quad (19, b)$$

verbunden sind, so folgt wegen Gl. 5a, b zunächst

(20, a) $q_1 : p_1 = \varphi : \psi = \mu_1$ bzw. $q_2 : p_2 = \chi : (-\psi) = \mu_2$ (20, b)
und hieraus in Verbindung mit Gl. 2 für die Höhe z von P der Wert

$$z = p_1 \varphi = q_1 \psi = p_2 \chi = -q_2 \psi. \quad (21)$$

Man gewinnt P also auch, wenn man P_0 auf u_1 in die zum Grundrißwinkel $+\psi$ gehörige Lage U_1 bringt und U_1 um f durch den Winkel φ dreht oder indem man P_0 auf u_2 in die durch $-\psi$ bestimmte Lage U_2

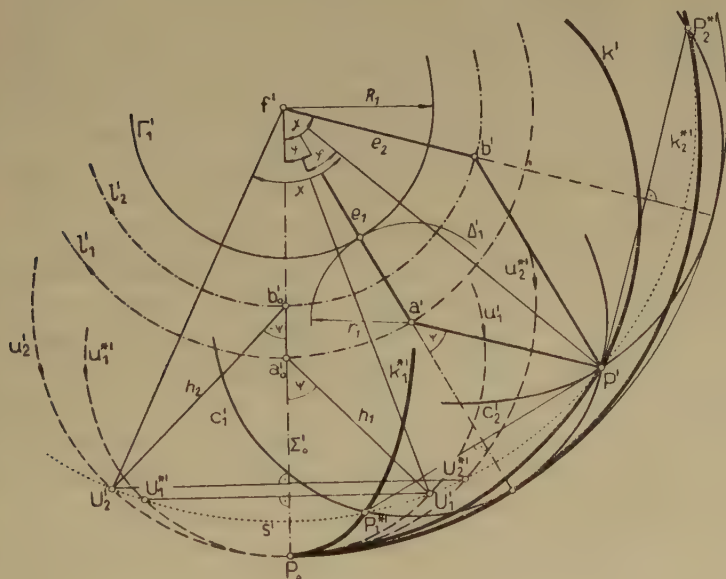


Abb. 5.

bringt und U_2 um f durch den Winkel χ dreht; wir bezeichnen u_1, u_2 als *Ur-Schraublinien* und q_1, q_2 als *Ur-Parameter* von k . Zwischen den Drallwerten d_1, d_2 von $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$, den Leitparametern p_1, p_2 und den Ur-Parametern q_1, q_2 von k bestehen wegen Gl. 13a, b und 14 a, b die Beziehungen

$$(22, a) \quad \frac{1}{d_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{d_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} \quad (22, b)$$

Die Radien der Polzyylinder von $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ lassen sich in Abhängigkeit von p_1, q_1 bzw. p_2, q_2 und den Radien e_1, e_2 von l_1, l_2 mittels Gl.

$$(23, a) \quad r_1 = \frac{q_1}{p_1 + q_1} e_1 \quad \text{bzw.} \quad r_2 = \frac{q_2}{p_2 + q_2} e_2 \quad (23, b)$$

$$(24, a) \quad R_1 = \frac{p_1}{p_1 + q_1} e_1 \quad \text{bzw.} \quad R_2 = \frac{p_2}{p_2 + q_2} e_2 \quad (24, b)$$

ausdrücken; schließlich liest man aus Gl. 21 ab, daß $q_2 = -q_1$ ist. Da der in der Höhe z befindliche Punkt P von k aus den in der gleichen Höhe liegenden Punkten U_1, U_2 von u_1, u_2 durch deren Drehung um f abgeleitet wird, so gehören die Punkte U_1, U_2 und P *einem und demselben Kreis s mit der Achse f an*. Die Gesamtheit der so definierten Kreise erfüllt eine *Drehfläche Ψ mit der Achse f , die sowohl die Ur-Schraublinien u_1, u_2 als auch die Trochoidenschraublinie k enthält*. Die vorstehenden Beziehungen können daher auch als Beweis der Tatsache angesehen werden, daß jede Fläche, die durch Drehung einer Schraublinie um eine zu deren Achse parallele Gerade f entsteht, zugleich durch Drehung einer mit der erstgenannten Kurve nicht kongruenten Schraublinie erzeugbar ist¹².

Die mit u_1, u_2 ungleichsinnig kongruenten Schraublinien u_1^*, u_2^* , die u_1, u_2 in der geraden Symmetrie bezüglich Σ_0 entsprechen, liegen gleichfalls auf Ψ ; die durch die Leitlinie l_1 (bzw. l_2) und die Ur-Schraublinie u_1^* (bzw. u_2^*) definierte Trochoidenschraublinie k_1^* (bzw. k_2^*) möge als eine *k ergänzende Kurve* bezeichnet werden. Die mit P gleich hoch liegenden Punkte U_1^*, U_2^* von u_1^*, u_2^* sind zu U_1, U_2 bezüglich Σ_0 symmetrisch, die in derselben Höhe befindlichen Punkte P_1^*, P_2^* von k_1^*, k_2^* liegen P bezüglich der Ebene $[af]$ bzw. $[bf]$ symmetrisch gegenüber; k_1^* und k_2^* sind daher *relative Gegenpunktkurven von k in Bezug auf das Ebenenbüschel f* . Der durch U_1, U_2 und P laufende Kreis s enthält auch U_1^*, U_2^* und P_1^*, P_2^* ; die Fläche Ψ trägt also außer den schon genannten Schraublinien und k *auch die Trochoidenschraublinien k_1^*, k_2^** . Da P_1^* überdies dem mit P inzidenten Kreis c_1 ($a; h_1$) angehört, so befindet sich k_1^* ebenso wie k auf der *geraden Kreisschraubfläche Φ_1* , die die Mittenlinie l_1 und den Normalschnitt c_1 besitzt; k_2^* liegt aus analogen Gründen auf der durch die Mittenlinie l_2 und den Kreis c_2 ($b; h_2$) bestimmten Fläche Φ_2 . Das Kurvenpaar k, k_1^* gehört somit den Flächen Φ_1, Ψ an und bildet, wie unmittelbar zu sehen ist, den *Gesamtschnitt*

¹² Über einen anderen Beweis dieser Tatsache vgl. E. Müller: Über Schiebflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht (Sitz.-Ber. Ak. d. Wiss. Wien, IIa, 1909). Der a. a. O. angeführte Zusammenhang zwischen den beiden Schraublinienscharen deckt sich genau mit den obigen, die Kurven u_1, u_2 betreffenden Beziehungen: Die Parameter beider Kurven sind entgegengesetzt gleich, der Radius h_2 von u_2 ist dem Abstand e_1 der Achsen a_0, f von u_1, Ψ gleich usw.

$[\Phi_1 \Psi]$; das Paar k, k_2^* stellt den Gesamtschnitt $[\Phi_2 \Psi]$ dar. Wir gewinnen demnach den

Satz 5: Die Fläche Ψ , die durch Drehung einer Schraublinie u_1 um eine zu deren Achse parallele Gerade f entsteht, wird von jeder mit Ψ koachsialen Schraubfläche Φ_1 , die einen Normalriß von u_1 zum Kreisschnitt hat, nach einem Paar einander ergänzender Trochoidenschraublinien geschnitten.

Auf Φ_1 gibt es, wie E. Müller a. a. O. bewiesen hat, eine einparametrische Schar exzentrischer Schraublinien vom Parameter $-p_1$; eine der Kurven deckt sich im Grundriß mit u_2' . Wir können daher den vorstehenden Sachverhalt auch so ausdrücken:

Satz 5, a: Wenn eine exzentrische Schraublinie der geraden Kreisschraubfläche Φ_1 auf demselben Drehzylinder liegt wie eine Schraublinie der mit Φ_1 koachsialen Drehfläche Ψ , so besteht der Gesamtschnitt von Φ_1 und Ψ aus einem Paar einander ergänzender Trochoidenschraublinien¹³.

Die Trochoidenschraubungen $\mathfrak{T}_1^*$, $\mathfrak{T}_2^*$, deren Bahnen k_1^* bzw. k_2^* sind, besitzen die Leitparameter $p_1^* = p_1$ (bzw. $p_2^* = p_2$), die Leitradien $e_1^* = e_1$ (bzw. $e_2^* = e_2$) und die Ur-Parameter $q_1^* = -q_1$ (bzw. $q_2^* = -q_2$). Für den gemäß Fußn. 5 definierten Modul der Grundrißbewegung $T_1^{*'} (bzw. \mathfrak{T}_2^{*'})$ ergibt sich wegen Gl. 20a, b der Wert $\mu_1^* = -\mu_1$ (bzw. $\mu_2^* = -\mu_2$); der Drall von $\mathfrak{T}_1^*$ (bzw. $\mathfrak{T}_2^*$) kann mit Rücksicht auf Gl. 22a, b durch Gl.

$$(25, a) \quad \frac{1}{d_1^*} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{d_2^*} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \quad (25, b)$$

dargestellt werden. Die zwischen den Parameterverhältnissen von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_1^*$ einerseits bzw. $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_2^*$ andererseits bestehende Beziehung wird wegen Gl. 6 a, b und 25 a, b durch die Formel

$$(26, a) \quad \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1^*} = 2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_2^*} = 2 \quad (26, b)$$

zum Ausdruck gebracht; für die Radien der Polzylinder von $\mathfrak{T}_1^*$, $\mathfrak{T}_2^*$ findet man (z. B. durch Verbindung von Gl. 26a, b mit 6a, b und 7a, b) die Werte

¹³ Der Sonderfall der Identität beider Schraublinien ist nur möglich, wenn der Leitparameter der Trochoidenschraubung $\mathfrak{S}$, deren Bahnfläche Φ_1 ist, dem zugehörigen Ur-Parameter gleich ist, d. h. wegen Gl. 19, a oder b), wenn $\mathfrak{S}'$ eine symmetrische Kreisrollung ist. Dieser Fall soll in einem folgenden Aufsatz beschrieben werden.

$$(27, a) \quad r_1^* = -\frac{r_1 e_1}{R_1 - r_1} \quad \text{bzw.} \quad r_2^* = -\frac{r_2 e_2}{R_2 - r_2} \quad (27, b)$$

$$(28, a) \quad R_1^* = \frac{R_1 e_1}{R_1 - r_1} \quad \text{bzw.} \quad R_2^* = \frac{R_2 e_2}{R_2 - r_2} \quad (28, b)$$

Wie diese Formeln zeigen, sind bei Trochoidenschraubungen, die im Grundriß durch symmetrische Kreisrollungen dargestellt werden, einige Besonderheiten zu erwarten (vgl. Fußn. 13).

Nr. 6. Sonderfälle.

Wenn die Leitlinien l_1, l_2 einer Trochoidenschraublinie k denselben Parameter p besitzen, so ist k eine *Euklidische Schraublinie* vom gleichen Parameter. Die Bewegungen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$, deren Bahn k ist, sind mit der *Euklidischen Schraubung* $\mathfrak{E}$ identisch, durch die l_1 und l_2 erzeugt wird; ihr Parameterverhältnis ist $+1$. Da die Aufrisse von l_1, l_2 und k drei koachsiale Sinuslinien von der Wellenlänge $2p\pi$ sind, so folgt aus Satz 1 u. a., daß durch Summierung zweier koachsialer Sinuslinien von gleicher Wellenlänge eine *dritte Sinuslinie von derselben Wellenlänge* entsteht.

Jede zu k konjugierte Kurve $\bar{k}$ besitzt zwei koachsiale Schraublinien $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ von entgegengesetzt gleichen Parametern zu Leitlinien. Die Bewegungen $\bar{\mathfrak{E}}_1, \bar{\mathfrak{E}}_2$, die $\bar{k}$ zur gemeinsamen Bahn haben, sind durch das Parameterverhältnis -1 charakterisiert, ihre Grundrisse sind daher zwei konzentrische Ellipsenbewegungen; $\bar{k}'$ ist also i. a. eine *Ellipse*. Wir bezeichnen $\bar{\mathfrak{E}}_1, \bar{\mathfrak{E}}_2$ als *Ellipsenschraubungen* und $\bar{k}$ als *Ellipsenschraublinie*; die Radien von $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ legen die Halbachsen a, b von $\bar{k}$ fest. Der Aufriß von $\bar{k}$ ist gleich dem von k eine Sinuslinie von der Wellenlänge $2p\pi$; die Schwingungsweite von $\bar{k}''$ schwankt je nach dem Winkel, den π_2 mit den Achsen von $\bar{k}'$ bildet, zwischen dem Maximum a und dem Minimum b . Zwischen k und $\bar{k}$ besteht *perspektive Affinität*; die Inzidenzebene der Verwandtschaft enthält die gemeinsame Achse f beider Kurven, die Affinitätsstrahlen sind horizontal. Die zu π_1 gehörigen Parameterpunkte O_1, O_2 von $\bar{k}$ liegen bezüglich π_1 symmetrisch, die ihnen zugeordneten Fluchtlinien der Tangentenfläche von $\bar{k}$ decken sich mit $\bar{k}'$, wobei die durch O_1 oder O_2 bestimmten Fluchtpunkte jeder Tangente t von $\bar{k}$ die Endpunkte des zu t' parallelen Durchmessers von $\bar{k}'$ sind. Jede singuläre Ellipsenschraublinie (Bahn eines auf dem bewegten Polzylinder $\bar{A}_1$ von $\bar{\mathfrak{E}}_1$ liegenden Punktes P) ist eine in der Ebene $[P/]$ befindliche Sinuslinie von der Wellenlänge $2p\pi$, deren Schwingungsweite gleich dem Durchmesser von $\bar{A}_1$ ist.

In der einparametrischen Mannigfaltigkeit aller Trochoidenschraubungen, durch die eine gerade Kreisschraubfläche Φ_1 erzeugt werden kann, ist nach dem Vorigen sowohl eine *Euklidische Schraubung* $\mathfrak{E}$ als auch eine *Ellipsenschraubung* $\mathfrak{E}_1$ enthalten; die Bahnen von $\mathfrak{E}$ sind die auf Φ_1 liegenden *Euklidischen Schraublinien* k^n , die von $\mathfrak{E}_1$ sind die zu jenen konjugierten *Ellipsenschraublinien* $\bar{k}^n$. Die in den Punkten jedes Kreisschnittes c_1 von Φ_1 vorhandenen Tangenten der Schraublinien k^n bilden nach Satz 3 eine Erzeugendenschar eines Hyperboloides η ; die mit den gleichen Punkten inzidenten Tangenten der Ellipsenschraublinien erfüllen wegen Satz 4 die zweite Erzeugendenschar von η .

Wenn c_1 die Achse f von Φ_1 schneidet, so sind die Kurven k^n , $\bar{k}^n$ mit den in Satz 4 hervorgehobenen Scharen *singulärer* Trochoidenschraublinien von Φ_1 identisch; η ist demnach *orthogonal*, die Kurven $\bar{k}^n$ sind *Sinuslinien* der Meridianebenen von Φ_1 . G. Loria bezeichnet derartige Flächen als *gewundene Säulen*; es ist bekannt, daß die auf ihnen liegenden Euklidischen Schraublinien längs jedes Kreisschnittes von Φ_1 ein orthogonales Hyperboloid η berühren und daß ihre Meridianschnitte Sinuslinien sind¹⁴. Dagegen scheint der Umstand, daß *diese Sinuslinien die Erzeugenden der zweiten Schar von η berühren*, bisher nicht bemerkt worden zu sein. Jede beliebige Trochoidenschraublinie k von Φ_1 schneidet f , ihr Grundriß ist daher eine *Rosenkurve* (vgl. Fußn. 8); das Gelenkparallelogramm, durch dessen Bewegung k entsteht, ist ein Rhombus. Hievon gilt auch die Umkehrung: *Jede Trochoidenschraublinie, deren Grundriß eine Rosenkurve ist, gehört einer gewundenen Säule an*. Die Leitlinien l_1 , l_2 von k besitzen gleichen Radius, man kann somit auch sagen: *Zwei koachsiale Schraublinien von gleichem Radius, aber verschiedenem Parameter lassen sich stets als Leitlinien einer Trochoidenschraublinie auffassen, die ihre Achse schneidet*. Die Grundrisse aller auf Φ_1 befindlichen Trochoidenschraublinien bestehen aus sämtlichen Rosenkurven, die den Leitkreis l_1' besitzen; ihre Aufrisse sind die Bi-Sinuslinien, die aus l_1'' und allen mit l_1'' koachsialen Sinuslinien abgeleitet werden können, deren Schwingungsweite gleich der von l_1'' ist. Die mit k inzidente Schraubfläche Φ_2 , deren Mittenlinie in l_2 liegt, ist eine mit Φ_1 *koachsiale gewundene Säule*. Da f ebenso wie k beiden Flächen angehört, so können wir als Sonderfall von Satz 2 feststellen:

¹⁴ G. Loria: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, deutsch von F. Schütte (Teubner 1913), Bd. 2, Nr. 312. Das Hyperboloid η wird dort zwar durch eine richtige Gleichung definiert, im Text aber irrtümlicherweise als Rotationshyperboloid bezeichnet.

Satz 6: *Zwei koachsiale gewundene Säulen, deren Mittenlinien gleiche Radien, aber verschiedene Parameter besitzen, haben ihre Achse f und eine Trochoidenschraublinie gemeinsam, die f schneidet.*

Da sich jede Rosenkurve als Fußpunktkurve einer gespitzten Trochoide auffassen läßt¹⁵, so kann man die auf einer gewundenen Säule liegenden Trochoidenschraublinien auch als *Fußpunktkurven von Regelflächen mit horizontaler Richtebene* darstellen, die eine singuläre Trochoidenschraublinie zur eigentlichen Striktionslinie besitzen; auf diesen Zusammenhang soll aber hier nicht eingegangen werden.

¹⁵ Vgl. H. Wieleitner, a. a. O., Nr. 173,

Buchbesprechungen.

Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Von *R. Carnap*. Mit 5 Textabb., X, 209 S. Wien: Springer-Verlag. 1954. Geb. S 162.—, sfr. 27.50, \$ 6.40, DM 27.—.

Rund 15 Jahre sind vergangen seit dem letzten Erscheinen eines deutschsprachigen Lehrbuches der mathematischen Logik, wenn man von der Neuauflage der „Grundzüge der Theoretischen Logik“ von *Hilbert-Ackermann* absieht. Dem vorliegenden Buch kommt daher die Aufgabe zu, eine deutliche Lücke im deutschen Schrifttum zu füllen. Von den deutschsprachigen Büchern des Verf. haben in diesem allerdings viel breiter angelegten Werk der „Abriß der Logistik“ und die „Logische Syntax der Sprache“ ihre Spuren hinterlassen, von den englischen Werken vermag man gelegentlich den Einfluß von „Meaning and Necessity“ und „Semantics“ zu spüren. Die Tendenz, sich weniger an den Mathematiker als an den Philosophen zu wenden, ist auch hier fühlbar, wenn auch der zweite Teil des Buches die Axiomatik einer ganzen Reihe mathematischer Disziplinen darbietet. Im ersten Teil werden die logistischen Untersuchungen in Form formaler Sprachen mitgeteilt. Die sogenannte einfache Sprache A hat den Stufenkalkül zum Gegenstand, verfügt also über die Grundverknüpfungen der Logik sowie über den All- und Existenzoperator, bedient sich der Begriffe Satz- und Prädikatenvariable sowie des Funktors und der Funktorvariablen. Es wird eine Bewertung eingeführt, welche auf den Begriffen wahr und L-wahr beruht, doch werden anläßlich der Erklärung der semantischen Begriffe Intension und Extension allgemeinere Fragen der Bewertung besprochen. Nicht nur die Sprache A sondern auch die beiden später betrachteten Sprachen B und C sind extensionale Sprachen. In der Sprache A werden die Identität und der Begriff Kardinalzahl definiert. Anläßlich des Aufbaues der Sprache B, welche sich der Typeneinteilung bedient, erläutert der Verf. den Unterschied zwischen dem syntaktischen und semantischen Aufbau einer Sprache. Kurz, wenn auch nicht ganz genau, kann man sagen, daß B die Sprache A mit Ausnahme der Satzvariablen umfaßt.

In B ist der zuerst von *Church* eingeführte λ -Operator definiert. Die Sprache C baut auf der Sprache B auf und bedient sich sowohl des syntaktischen als auch des semantischen Aspektes. Relations- und Klassenlogik werden jetzt ausführlich dargelegt. Die Kennzeichnung von Individuen ist in C mittels des Iota-Operators möglich. — Die vielen Beispiele und das häufige Eingehen auf philosophische Sachverhalte sollten dazu beitragen, dem Buche ein breiteres Leserpublikum zu sichern.

L. Schmetterer, Wien

On the Congruence of Sets and their Equivalence by Finite Decomposition. Von *W. Sierpinski*. („Lucknow University Studies“: XX.) 117 S. The Lucknow University. 1954.

Die vorliegende Monographie ist aus Vorlesungen *Sierpinski*s in Lucknow 1949 entstanden und beschäftigt sich mit den Problemen der Kongruenz und

der endlichen Zerlegungsgleichheit vornehmlich im R_1 , R_2 und R_3 . Nur gelegentlich wird auf andere Räume hingewiesen. In diesem Rahmen dürfte wohl eine gewisse Vollständigkeit erzielt worden sein, allerdings sind einige Ergebnisse ohne Beweis mitgeteilt, vornehmlich dann, wenn sie erst nach 1949 hinzugefügt wurden. Das hohe Interesse, welches den Problemen für die allgemeine Maßtheorie zukommt, braucht nicht betont zu werden. Das häufige Eingreifen der Kontinuumshypothese bringt es einerseits mit sich, daß eine Reihe von Sätzen derzeit noch der gesicherten Grundlage entbehren, anderseits werden mehrere reizvolle Verflechtungen sichtbar. Es ist überflüssig hinzuzufügen, daß der Autor für eine Darlegung dieses Stoffes wie kein anderer prädestiniert erscheint. Zunächst werden Kongruenzfragen von Mengen und ihren eigentlichen Teilen erörtert und dann Translationen linearer Mengen untersucht. Zunächst wird gezeigt, daß es außer der ganzen Geraden keine lineare Menge gibt, so daß nur endlich viele in sie überführbare Mengen existieren, aber das Auswahlaxiom lehrt die Existenz einer Menge, zu welcher genau abzählbar unendlich viele in sie überführbare Mengen gehören. Es folgen Sätze über Zerlegungsgleichheit linearer Mengen. Im Anschluß an die Tatsache, daß die Gerade endlich gleich in zwei Teile mit der Geraden nach Entfernung einer beliebigen abzählbaren Menge zerlegt werden kann, werden eine Reihe interessanter (positiver und negativer) Resultate über die endliche Zerlegungsgleichheit der Menge der reellen, transzendenten, algebraischen, rationalen Zahlen hergeleitet. Unter den folgenden Sätzen, den „Paradoxien“ heben wir insbesondere die Existenz einer ebenen Menge hervor, welche Vereinigungsmenge zweier fremder zu ihr kongruenter Teilmengen ist. Dies wurde vor 40 Jahren von *Mazurkiewicz* und dem Verf. gefunden. Das Hausdorffsche Paradoxon wird mit dem vollständigen im wesentlichen unveränderten Hausdorffschen Beweis dargestellt. Die hieher gehörigen Ergebnisse von *Banach* und *Tarski* werden erwähnt, insbesondere die maßtheoretischen Folgerungen aus dem Hausdorffschen Beispiel. Hingewiesen wird auch auf die fundamentale Erkenntnis von *Banach*, daß im R_1 und R_2 ein allgemeines additives Maß existiert. Obwohl die Arbeit von *v. Neumann* im Zusammenhang mit einem v. Neumannschen Paradoxon erwähnt wird, wird doch auf den in dieser Arbeit ausgeschalteten gruppentheoretischen Kern der Banachschen Erkenntnisse nicht Bezug genommen. Den Abschluß bilden Angaben zum verallgemeinerten Maßproblem von *Kuratowski*, über das absolute Maß von *Tarski* u. a. In einem Anhang werden einige Sätze mitgeteilt, welche in der Vorlesung aufgeworfene Probleme behandeln. Die Lektüre des Buches ist fesselnd, zum Nachschlagen vielleicht etwas zu wenig gegliedert. Der Charakter einer Vorlesung ist also noch unverkennbar. Jeder Mathematiker wird es warm begrüßen, daß diese grundlegenden Untersuchungen nunmehr in zusammenfassender Darstellung vorliegen.

L. Schmetterer, Wien

Gruppentheorie. Von *A. G. Kurosch*. Mit einem Anhang von *B. G. Neumann*. („Mathematische Lehrbücher und Monographien“: I. Abt., Band III.) XII, 418 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1953.

A. G. Kurosch veröffentlichte im Jahre 1944 in Moskau ein umfangreiches Lehrbuch über Gruppentheorie. Dieses Werk wurde nun vom Forschungsinstitut für Mathematik an der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin unter Anleitung von *I. Kaloujnine* ins Deutsche übersetzt und damit einem weiteren großen Leserkreis leichter zugänglich gemacht. Während sich bisher die meisten Lehrbücher im wesentlichen auf endliche Gruppen beschränkten, treten diese in dem Lehrbuch von *Kurosch* bewußt in den Hintergrund, während abzählbare,

ja sogar nicht-abzählbare Gruppen das Feld beherrschen. Die Gruppentheorie ist zwar ein Teilgebiet der Algebra, doch hat sie auch große Bedeutung in anderen mathematischen Disziplinen und gerade diese sind es, die ein eingehendes Studium der unendlichen Gruppen fordern. Dabei ergibt sich ein weites Forschungsgebiet, auf dem eine Fülle schöner Resultate zwar schon erreicht wurde, aber auch noch eine große Anzahl von Problemen der Lösung harret. Das Buch von *Kurosch* behandelt die grundlegenden Teilgebiete der Theorie der unendlichen Gruppen. Weitgehend entwickelt ist die Theorie der Abelschen Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden. Hier ist es möglich, die Gruppen durch Systeme von Invarianten zu charakterisieren. Aber auch die allgemeine Theorie der Abelschen Gruppen ist schon weit gediehen. Sie zerfällt in die Theorie der periodischen abelschen Gruppen (alle Elemente haben endliche Ordnung), in die Theorie der torsionsfreien abelschen Gruppen (alle von der Null verschiedenen Elemente haben unendliche Ordnung) und in die Theorie der gemischten abelschen Gruppen (die Elemente haben teils endliche, teils unendliche Ordnung). Einen breiten Raum nimmt in dem Buch die Theorie der freien Gruppen ein. Ich erwähne ferner: Bestimmung von Gruppen durch definierende Relationen, direkte und freie Produkte, auflösbare Gruppen, Gruppenerweiterungen, Zerlegung von Gruppen. Das Buch gibt in hervorragender Darstellung einen Überblick über die Theorie der unendlichen Gruppen, über die erzielten Leistungen, die hier verwendeten Methoden, und enthält eine Fülle von neuen Problemen. Davon wurde ein Teil in den letzten zehn Jahren gelöst und so gibt das Buch leider nicht den neuesten Stand der Entwicklung. Viele der neuesten Ergebnisse wurden in der eben erschienenen zweiten russischen Auflage verarbeitet. Als Ersatz wurde in dem vorliegenden Buch in zahlreichen Fußnoten auf die neuesten Ergebnisse hingewiesen und das Literaturverzeichnis (22 Seiten!) auf den neuesten Stand gebracht. Ferner berichtet *B. H. Neumann* im Anhang über neueste Ergebnisse über freie Gruppen und Einbettung von Gruppen. Das Buch stellt eine wesentliche und wertvolle Bereicherung der vorhandenen Literatur über Gruppentheorie in deutscher Sprache dar. Vom Leser werden nur geringe Kenntnisse aus Algebra, Zahlentheorie und Mengenlehre vorausgesetzt. *N. Hofreiter*, Wien

Mathematik von der Schule zur Hochschule. Von *J. Spoerel*. Mit 85 Textabb. XII, 210 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1954. Geb. DM 16.—.

Der Übergang von der Schulmathematik zur Mathematik an einer Hochschule bietet bekanntlich den Studierenden arge Schwierigkeiten. Dies hat z. T. seinen Grund darin, daß der Schulunterricht viel breiter ist, während die Vorlesungen an den Hochschulen viel konzentrierter sind und viel mehr Arbeit den Studenten überlassen wird. Dies ist aber eine Erscheinung, die nicht typisch für die Mathematik ist und von jedem Hochschüler überwunden werden muß. Eine besondere Schwierigkeit in den mathematischen Vorlesungen liegt, wie vielfach angenommen wird, in der rechten Erfassung des Grenzwertbegriffes. Nach der Meinung des Verfassers bestehen die Schwierigkeiten auch in folgendem: 1. in unzureichender Vertrautheit mit einem Teil des Stoffes der Schulmathematik, 2. in fehlender Übung im rein formalen Rechnen, 3. in einer in Hinblick auf die Hochschulmathematik unzuweckmäßigen Form und Auswahl des Stoffes der Schulmathematik. Der Verfasser bemüht sich, gerade diese Schwierigkeiten zu verringern. Dabei kommt ihm eine reiche Erfahrung zu gute, die er in Übungen, Arbeitsgemeinschaften und Vorlesungen für Studienanfänger erworben hat. Das Buch ist keine Einführung in die Differential- und Integralrechnung; der Grenzwertbegriff wird nur gestreift. Ausführlich kommen hingegen der Zahl- und

Funktionsbegriff vor (rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen, algebraische und transzendente Funktionen, elementare Funktionen einer komplexen Variablen). Auch die Anfangsgründe der linearen Algebra (lineare Gleichungssysteme, Determinanten, Vektoren) werden gebracht. Das Wesentliche an dem Buch ist nicht der Inhalt, sondern die pädagogisch meisterhafte Art der Darstellung. So ist das Buch ein wirklicher Behelf für Studierende und reich an Anregungen für den Lehrer. Besonders erwähnen möchte ich die große Anzahl der Aufgaben mit den vielen Hinweisen für geschicktes Rechnen.

N. Hofreiter, Wien

An Analytic Calculus for School and University. Von *E. A. Maxwell*. Band I: Mit 61 Textabb., XII, 165 S. 15 s. net. — Band II: Mit 103 Textabb., VII, 272 S. 18 s. net. Cambridge: At the University Press. 1954.

Das geplante vierbändige Werk soll die Differential- und Integralrechnung und die Differentialgleichungen bringen. Der Verf. ist bemüht, die Darstellung einfach und klar zu wählen, aber den Leser doch auch an Strenge zu gewöhnen. Bemerkenswert ist die Auffassung des Autors (Bd. I, S: XII): „My own feeling is that the underlying foundations should be made firm by a study of calculus in its own right; the applications can then be made by others according to their own individual requirements. To attempt the two things at once may lead to confusion“. Band I bringt den Begriff des Differentialquotienten, einfache Differentiationsregeln und Anwendungen (Maxima und Minima, Wendepunkte, Mittelwertsätze), ferner den Begriff des bestimmten und des unbestimmten Integrals, einfache Integrationsregeln (Substitution, partielle Integration) und Anwendungen (Flächeninhalt ebener Bereiche, Volumen und Oberfläche von Drehflächen, Schwerpunkt, Trägheitsmoment, numerische Integration und Mittelwerte). Band II enthält den Logarithmus und die Exponentialfunktion, Reihen, Hyperbelfunktionen, ebene Differentialgeometrie, komplexe Zahlen und Funktionen, Integrale von elementaren Funktionen und uneigentliche Integrale. Der Logarithmus wird durch das Integral definiert, was am einfachsten ist. Wie auf dem Titelblatt steht, sind die Bücher für Schule und Universität gedacht. Um leicht verständliche Bücher zu schreiben, hat der Verf. wichtige Sätze über die Konvergenz von Folgen, ferner Sätze über stetige Funktionen (insb. gleichmäßige Stetigkeit, Maxima und Minima von stetigen Funktionen) nicht gebracht. Die Behandlung der Reihen ist mehr plausibel als streng. Gleichmäßige Konvergenz fehlt. Der Verf. führt oft Sätze an, ohne sie zu beweisen, oder beschränkt sich auf anschauliche Überlegungen. Außerdem verweist er den Leser auf das Studium größerer Lehrbücher der Analysis. Die beiden Bücher enthalten zusammen über 1000 Übungsaufgaben, die zum Teil aus den Anwendungen sind. Als erste Einführung können die Bücher empfohlen werden.

N. Hofreiter, Wien

Trattato di Analisi Matematica. Band I: Fondamenti dell'algebra e del calcolo infinitesimale nel campo reale e in quello complesso. Von *M. Picone* und *G. Fichera*. Mit 93 Textabb., 520 S. Rom: Tumminelli, 1954. Lire 5700.—.

Die nach dem Kriege auch in Italien aufgetretene Knappheit an Lehrbüchern ist in den letzten Jahren durch zahlreiche Neuerscheinungen rasch beseitigt worden. Daher ist es sehr zu begrüßen, daß nun auch die von *Picone* verfaßten Lehrbücher der höheren Analysis (*Lezioni di Analisi infinitesimale*, 2 Bde., Catania 1923; *Appunti di Analisi superiore*, Napoli 1940), die schon vor dem Kriege einen ausgezeichneten Ruf unter einem erlesenen Schülerkreis genossen

haben, in neuen Bearbeitungen zu erscheinen beginnen. So sind vor zwei Jahren die „Vorlesungen über die moderne Integrationstheorie“ (*M. Picone-T. Viola, Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione*, Einaudi 1952) erschienen und nun liegt der 1. Band eines auf 3 Bände berechneten Werkes vor, das den gesamten Lehrgang der höheren Analysis umfassen soll. In diesem 1. Band werden zunächst einige Begriffe und Kenntnisse der Algebra (Matrizen, Determinanten, lineare Gleichungen usw.) vermittelt, worauf die Differential- und Integralrechnung folgt. Der folgende 2. Band soll die Theorie der algebraischen Gleichungen, eine Vertiefung und Verallgemeinerung der Integrationstheorie, die unendlichen Reihen, sowie die gewöhnlichen Differentialgleichungen umfassen. Für den letzten Band sind die Fundamente der Differentialgeometrie, Fourierreihen, partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung vorgesehen.

Der Verf., der sich auf die Mitarbeit seines bewährten Schülers *G. Fichera* stützen kann, sieht auf eine 45jährige pädagogische Erfahrung als akademischer Lehrer und 25jährige praktische Erfahrung als Direktor des italienischen Recheninstitutes zurück; die Mehrzahl der jüngeren, heute an italienischen Universitäten lehrenden Analytiker sind durch seine Schule gegangen. Daher wird man seiner pädagogischen Methode den praktischen Erfolg nicht absprechen können, und es ist interessant darauf hinzuweisen, worin sie sich etwa von den gewöhnlich befolgten Ansichten unterscheiden mag. Vor allem macht es *Picone* seinen Lesern nicht leicht, sondern stellt von Anfang an ziemlich große Ansprüche an die Fähigkeit des konzentrierten und abstrakten logischen Denkens. Er befolgt sehr streng die deduktive Methode, indem er die Theorie zuerst in größter Allgemeinheit entwickelt und dann die gewöhnlich gebrauchten Sätze und Formeln durch Spezialisierungen gewinnt. So wird der Grenzbegriff gleich zu Beginn in einer so großen Allgemeinheit für beliebig „geordnete Variable“ und „geordnete Mengen von Operationen“ begründet, daß daraus nicht nur die gewöhnliche Infinitesimalrechnung, sondern unmittelbar auch der Lebesguesche und Stieltjes'sche Integralbegriff gefolgert werden kann. Der Riemannsche Integralbegriff wird sofort für n -dimensionale Bereiche begründet und in seinen Eigenschaften erforscht, die Formeln und Sätze der gewöhnlichen Integralrechnung sind Spezialisierungen, die erst am Ende des Kapitels kurz behandelt werden.

Man wird nicht erwarten, daß diese Methode bei der großen Masse der Studenten, welche überhaupt mathematische Vorlesungen besuchen, immer Erfolg hat, aber sie wird einen kleineren Kreis, und zwar gerade die besten, die es lieben, die Gipfel auf dem kürzesten und steilsten Weg zu bezwingen, ansprechen und begeistern. Und das scheint auch durch die Tatsachen bestätigt zu sein.

W. Gröbner, Innsbruck

Vorlesungen über Approximationstheorie. Von *N. I. Achieser*. IX, 309 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1953. DM 29.—.

Seit *Jacksons* Buch ist kein Werk mehr erschienen, welches sich ausschließlich mit den Fragen der Approximationstheorie beschäftigt. Die deutsche Übersetzung des 1947 in russischer Sprache erschienenen Buches wird man daher besonders begrüßen. Das 1. Kapitel — Approximationsfragen in linearen normierten Räumen — gibt zunächst den allgemeinen Rahmen der Darstellung, den Existenzsatz für die beste (lineare) Approximation in normierten Räumen und einen allgemeinen Eindeigkeitssatz. Es wird dann auf den Hilbertschen Raum spezialisiert und hier fügen sich der Weierstraßsche Satz — mit dem seines wahrscheinlichkeitstheoretischen Charakters entkleideten Beweis von *Bernstein* — und seine Verallgemeinerungen auf den L^p ein. Es folgen das Theorem

von Müntz und der Riesz'sche Satz über die Darstellung linearer Funktionale im Raum durch innere Produkte. Das 2. Kapitel — der Ideenkreis von *Tschebyscheff* — behandelt die Approximation stetiger Funktionen durch rationale Funktionen. Das diesbezügliche Theorem von *Tschebyscheff* beruht auf den von *de la Vallée Poussin* für Polynome angestellten und vom Verf. verallgemeinerten Überlegungen. Dann wird ein interessantes allgemeines Approximationsproblem von *Haar* betrachtet, welches seinerzeit im Zusammenhang mit Fragen der Minkowskischen Maßbestimmung studiert wurde. Das 3. Kapitel — Elemente der harmonischen Analyse — enthält zunächst einige grundlegende Tatsachen über Fouriersche Reihen und Integrale und beschäftigt sich dann mit der Theorie von *Plancherel* und *Watson* in L^2 . Das *Fejer*'sche Theorem wird zu einer allgemeinen Theorie der Fejerschen Kerne erweitert. Mit einem Blick auf die konjugierten Funktionen schließt das Kapitel. Das 4. Kapitel — Einige Extremaleigenschaften ganzer transzendenter Funktionen vom exponentiellen Typ — beginnt mit einer Definition dieser Funktionenklasse und geht dann zur Boreltransformation über. Diese wird benützt, um einen Beweis für das Theorem von *Wiener-Paley* über die Darstellung der Funktionen der Klasse E (Terminologie von *Wiener-Paley*. Hier wird die Klasse mit W_a bezeichnet) als Fourierintegral zu geben. Die folgenden Untersuchungen fallen in den Umkreis der Bernsteinschen Ungleichung für trigonometrische Polynome und ihrer Verallgemeinerungen. Hierbei spielt besonders die Bernsteinsche Klasse der auf der reellen Achse beschränkten ganzen Funktionen vom Exponentialtyp eine Rolle. Schließlich erwähnen wir noch das wichtige Theorem von *Fejer* über die Darstellung nichtnegativer trigonometrischer Polynome als Betragsquadrat eines Polynoms. Das 5. Kapitel — Fragen der besten harmonischen Approximation — ist durch den Titel hinreichend gekennzeichnet. Die Untersuchungen von *Bernstein* und *Jackson* werden für eine Anzahl wichtiger Funktionsklassen betrachtet. Das 6. Kapitel — Das Approximationstheorem von *Wiener* — gipfelt in der Formulierung eines Tauberschen Theorems vom Wiener'schen Typ, dem Satz von *Ikehara* und dem Taubertheorem von *Carleman*. Ergänzend folgen eine Reihe reizvoller Untersuchungen: Zum Abgeschlossenheitsproblem, zum Fragenkreis von *Caratheodory* und u. a. zu einem Extremumsproblem von *Solotareff*, das die *Tschebyscheff*'sche Minimalaufgabe verallgemeinert.

Eine Besprechung des Buches kann man nicht schließen, ohne darauf hinzuweisen, daß hier wieder einmal der Beweis geliefert wurde, daß die sogenannte „klassische Analysis“ noch lange nicht erschöpft ist und nach wie vor hohes Interesse beanspruchen darf. Die Übersetzung ist im allgemeinen flüssig und ausgezeichnet gelungen. Um so mehr wird man die wenigen Stellen in Kauf nehmen, an denen die „Schachtelkonstruktionen“ der russischen Sprache noch merkbar sind. Das Literaturverzeichnis will keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Man darf dem Buch auch in der deutschsprachigen Fassung einen schönen Erfolg prophezeien.

L. Schmetterer, Wien

Rachunek Operatorów. Von *J. Mikusinski*. (Monografie Matematyczne: Band XXX.) Mit 142 Textabb., 369 S. Warschau: 1953.

In der bekannten polnischen Sammlung mathematischer Monographien ist nun auch ein Band über Operatorenrechnung erschienen, der der Bedeutung dieses Zweiges der Mathematik vor allem für die Anwendungen Rechnung trägt. Die Begründung der Operatorenrechnung erfolgt hier in origineller Weise durch „algebraische Erweiterung“ des „Bereiches der Funktionen“ zum „Bereich der Operatoren“ (die übliche Begründung mittels Laplace-Transformation wird erst

am Schluß des Buches zum Vergleich angeführt). Den Anfang bildet dabei die Definition der Faltung zweier Funktionen als „Produkt“, sowie die wichtigsten Eigenschaften der Faltung. Dabei werden zunächst nur die in $[0, \infty)$ stetigen und beschränkten Funktionen zugrunde gelegt. Ein bekannter Satz von *Titchmarsh* — der hier auf einfache Weise bewiesen wird — besagt dann, daß ein solches „Produkt“ nur Null ist, wenn ein Faktor Null ist. Wie in der Algebra bei der Erweiterung eines Integritätsbereiches zu einem Körper werden nun die „Quotienten“ bei dieser Produktbildung als neue Elemente eingeführt und Operatoren genannt. Obwohl diese Methode abstrakt scheint, vollzieht sich der Übergang zu konkreten Beispielen ziemlich einfach. Von den zahlreichen Anwendungen erwähnen wir nur einige: Ausführlich werden elektrische Schaltungen besprochen (Vierpoltheorie, Brückenschaltungen, Elektronenröhre als Vierpol). Ferner werden allgemein lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und verschiedene partielle Differentialgleichungen (schwingende Saite, Wärmeleitung, Telegraphengleichung, biharmonische Gleichung u. a.) behandelt. Sukzessive lernt der Leser zahlreiche spezielle Funktionen kennen (Gammafunktion, Besselfunktionen und die Funktion $\operatorname{erf}(x)$). Zahlreiche nicht zu schwere Aufgaben mit Resultaten erleichtern dem Leser das Studium des Werkes.

Für die Lektüre sind nur ganz wenige Voraussetzungen nötig. So werden z. B. auch einfache Konvergenzkriterien und der Begriff gleichmäßige Konvergenz im Buch selbst behandelt, ebenso wie z. B. die Kirchhoffschen Gesetze. Die einfache und klare Darstellung macht das Buch zu einer schönen Lektüre vor allem auch für den, der nicht allzu tiefgehende Vorkenntnisse besitzt.

K. Prachar, Wien

Die Differentialgleichungen der Technik und Physik. Von W. Hort und A. Thoma. Sechste Auflage. Mit 343 Textabb., XI, 582 S. Leipzig: J. Barth. 1954.

Für die Beliebtheit des vorliegenden Werkes spricht schon die nun nötig gewordene sechste Auflage. Es stellt sich die Aufgabe, die Differentialgleichungen, die der Ingenieur und Physiker braucht, für den Studierenden zusammenzustellen. Aber das Buch geht über dieses Ziel weit hinaus, indem es außer den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen auch noch anderes bringt, was Techniker und Physiker gut brauchen können. So findet man hier eine Einführung in die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung — freilich nur mit der Strenge, die in Physik und Technik üblich ist. Weiters findet man z. B. einiges über mathematische Instrumente und Maschinen, insbesondere zur Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Auch eine Einführung in die Differenzengleichungen sowie in die Variationsrechnung und die Theorie der Integralgleichungen wird gegeben. Den Schluß bildet ein Verzeichnis der behandelten Differentialgleichungen. Besonders sei auf die zahlreichen — vor allem technischen — Anwendungsbeispiele hingewiesen, die mit einer gewissen Liebe zur Sache behandelt werden. Wie man sieht, ist das Werk eine Art „Lehrbuch der angewandten Mathematik“. Als solches wird es jeder Interessent gerne zur Hand nehmen und daraus manches lernen können.

K. Prachar, Wien

Premier Colloque sur les Equations aux Dérivées Partielles. 129 S. CBRM, Liège: Thone Paris: Masson. 1954. bfr. 200.—, ffr. 1400.

Die Kolloquien, die das belgische „Centre de Recherche Mathématique“ von Zeit zu Zeit über die verschiedensten Zweige der modernen Mathematik

abhält, haben sich für die mathematische Forschung bereits als sehr fruchtbar erwiesen. Die hier abgedruckten Vorträge wurden vom 17. bis 19. Dez. 1953 in Louvain abgehalten und geben ein lebendiges Bild davon, wieviel auch auf diesem klassischen Gebiet der Mathematik noch zu tun ist. Im einzelnen sind dies folgende Vorträge: *A. Lichnerowicz*, Laplace'sche Gleichungen und harmonische Räume; *Y. Fourès*, Lösung des Cauchy'schen Problems für hyperbolische nicht-lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung; *J. Delsatre*, Über gewisse Systeme partieller Diffgl. mit einer unbekannten Funktion und eine Verallgemeinerung der Bessel- und hypergeometrischen Funktionen; *G. Doetsch*, Anwendung der zweidimensionalen Laplace-Transformation in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen; *Th. Lepage*, Gleichungen zweiter Ordnung und symplektische Transformationen; *P. Gillis*, Über gewisse Klassen von nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung; *R. Sauer*, Geometrische Bemerkungen über quasilineare, homogene partielle Diffgl. 2. Ordnung.

K. Prachar, Wien

Versicherungsmathematik. Von *F. Böhm*. Band I. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. (Sammlung Götschen: Band 180.) 151 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1953.

Das anlässlich der Besprechung des II. Bandes (dies. Monatshefte 57, 356) Gesagte gilt auch sinngemäß für den I. Band. Inhalt: Der Zinsfuß als erste Rechnungsgrundlage, Die Sterbetafel als zweite Rechnungsgrundlage, Die Prämienreserve, Die Kosten als dritte Rechnungsgrundlage, Die Versicherung verbundener Leben, Anhang (Die wichtigsten gesetzlichen Bestimmungen über Prämien- und Reservenberechnung), 18 Tabellen.

L. Schmetterer, Wien

Stochastic Processes. Von *J. L. Doob*. VII. 654 S. New York: John Wiley & Sons. — London: Chapman & Hall. 1953.

Die Theorie der stochastischen Prozesse hat in letzter Zeit eine Reihe von Darstellungen gefunden. (*Arley* 1943 bzw. 1948, *P. L. vy* 1948, *Blanc-Lapierre* und *Fortet* 1953). Die gewaltige Ausdehnung der Theorie und ihrer Anwendungen erkennt man daraus, daß trotz unvermeidbarer Berührungspunkte jedes Werk etwas Besonderes zu sagen hat. Das Buch von *Doob* wendet sich insbesondere an den Mathematiker. Kurz und prägnant werden zunächst die Vorkenntnisse entwickelt, insbesondere der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit und des bedingten Erwartungswertes (*Kolmogoroff*) sowie die charakteristische Funktion für eine eindimensionale zufällige Variable. Das zweite Kapitel bringt die Definition eines stochastischen Prozesses, bespricht die Schwierigkeiten, die sich einer Verallgemeinerung des Wahrscheinlichkeitsmaßes auf den Funktionenraum entgegenstellen und zeigt, wie man sie überwinden kann. Ausführlicher wird noch der Gauß'sche Prozeß behandelt, dem der Verf. in einer zusammenfassenden Darstellung in den *Ann. of Math. Stat.* in neuerer Zeit gewidmet hat. Dann folgt eine Vorschau auf die kommenden Untersuchungen. Das III. Kapitel beschäftigt sich mit den Folgen und Reihen unabhängiger zufälliger Variabler. Es bietet die schon klassisch gewordenen Ergebnisse (*Kolmogoroff*, *Chinč'in*) dar (Null-Einsgesetz, Dreireihensatz, Gesetze der großen Zahlen), weiter im Zusammenhang mit dem zentralen Grenzwertsatz die unendlich oft teilbaren Verteilungen, insbesondere die Formel von *Levy-Chinč'in* für deren charakteristische Funktion. Das nächste Kapitel studiert Prozesse mit unkorrelierten zufälligen Variablen

und nimmt hiebei manche Untersuchungen des vorhergehenden Kapitels nochmals auf. Hier finden auch einige Sätze über Martingale ihren Platz, deren Theorie dann ausführlich im VII. Kapitel entwickelt wird. Das V. und VI. Kapitel ist den Markoffschen Prozessen gewidmet. Das eine sehr umfangreiche Kapitel hat die diskreten, das andere die stetigen Prozesse zum Gegenstand. Die Behandlung der diskreten Prozesse geht vielfach auf *Doebelin* zurück, der Inhalt des VI. Kapitels, dessen Grundlagen auf *Kolmogoroff* zurückgehen, greift bei der Ableitung der Fokker-Plankschen Gleichung späteren Kapiteln vor (VIII, IX). Das nun folgende 100 Seiten umfassende VII. Kapitel ist das längste des ganzen Buches und ist mit Martingale betitelt. Diesen Begriff verallgemeinert der Autor zum nützlichen Begriff der Semi-Martingale. Es zeigt sich, daß eine Reihe von Sätzen über Martingale in geeigneter Form für Semi-Martingale ausgesprochen werden können. Das auf den Verf. zurückgehende Konvergenztheorem für Martingale gibt zu mehreren Anwendungen Anlaß, die in dieser Form ebenfalls auf den Verf. zurückgehen. Wir heben die Theoreme für Reihen unabhängiger zufälliger Variabler hervor, die sich um die zuerst von *Marcinkiewicz* und *Zygmund* gefundenen Integralungleichungen einer Summe unabhängiger Variabler und deren Maximum gruppieren, und das starke Gesetz der großen Zahlen. Weitere Anwendungen betreffen das Maximum likelihood Prinzip sowie die Sequential-Analysis. Zu erwähnen ist noch die eigenständige Behandlung der Martingale mit stetigem Parameter. Das VIII. Kapitel ist den besonders für die Anwendung wichtigen Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen gewidmet. Es wird der Prozeß der Brownschen Bewegung untersucht, und zwar das Konzept von *Einstein*. Auf eine Diskussion des verbesserten Modelles von *Uhlenbeck*, das Verf. anderswo untersucht hat, wird hier verzichtet. Wir erwähnen noch den Poissonschen Prozeß und eine interessante Anwendung. Das nächste Kapitel betrifft den Wienerischen Prozeß. Im Mittelpunkt steht das Wienerische Integral und dessen Anwendungen. Das X. und XI. Kapitel behandelt die stationären Prozesse und zwar wieder zunächst den diskreten und dann den stetigen Fall. Zunächst werden die maßtreuen, metrisch transitiven Transformationen und Prozesse definiert und dann der Birkhoffsche Ergodensatz bewiesen. Die grundlegenden Untersuchungen von *Chincin* über die Autokorrelationsfunktion sowie die Spektraldarstellung solcher Prozesse von *Cramér* folgen. Dann findet man in wahrheitstheoretischer Formulierung das v. Neumannsche Mittelergodentheorem. Es kommt dem Leser sehr zu statten, daß sich der Autor die Mühe gemacht hat, vieles im XI. Kapitel nochmals ausführlich zu formulieren, worüber man im diskreten Falle schon verfügt. Das XII. Kapitel behandelt die lineare Regressionsanalysis stationärer Prozesse. Wir erwähnen insbesondere die sich um das Theorem von *Wold* über die kanonische Form regulärer Prozesse gruppierenden Untersuchungen. Den Abschluß bilden Verallgemeinerungen auf mehrdimensionale Prozesse. Ein Ergänzungskapitel dient als Führer durch die allgemeine Maßtheorie. Es erübrigt sich wohl nach diesen Hinweisen besonders darauf aufmerksam zu machen, daß es sich hier um ein ausgezeichnetes Buch handelt, welches eine wertvolle Bereicherung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Literatur darstellt.

L. Schmetterer, Wien

Projective Geometry and Projective Metrics. Von *H. Busemann* und *P. J. Kelly*. VIII, 332 S. New York: Academic Press Inc. 1953, \$ 6.—.

Die Aufgabe, eine Brücke zwischen dem klassischen Bestand der projektiven Geometrie und der aktuellen mathematischen Forschung zu schlagen, ist gewiß

nicht leicht, wird aber durch das vorliegende Werk in origineller und zweckmäßiger Weise gelöst.

In den beiden ersten Kapiteln bringen die Verf. die wichtigsten Tatsachen der projektiven Geometrie der Ebene auf analytischer Grundlage, aber unter reichlicher Verwendung synthetischer Schlußweisen und wenden sich im dritten Kapitel der affinen Geometrie zu, in deren Rahmen auch die Theorie der konvexen ebenen Mengen behandelt wird, soweit diese im folgenden gebraucht wird. Das vierte Kapitel, „Projektive Metrik“, bildet den Kernteil des Buches; ausgehend vom Begriff des metrischen Raumes werden zunächst die metrische Gerade und der metrische Großkreis als Punktmengen erklärt, die zur euklidischen Geraden bzw. zum Kreis isometrisch sind, worauf die Definition eines n -dimensionalen projektiv-metrischen Raumes folgendermaßen geschieht: Untermenge R eines n -dimensionalen projektiven Raumes, die mit einer Metrik derart versehen ist, daß einerseits die Dreiecksungleichung nur dann in die Gleichheit übergeht, wenn die drei Punkte kollinear sind, andererseits der Schnitt der Verbindungsgeraden zweier Punkte von R mit R entweder eine metrische Gerade oder ein Großkreis ist. Über *Hilberts* Problem der Bestimmung aller projektiven Metriken und seine Lösung durch *Hamel* wird kurz berichtet, aus *Hamel's* Ergebnissen folgt insbesondere die Unterscheidung „geschlossener“ und „offener“ projektiv-metrischer Räume; im ersten Falle ist R der gesamte projektive Raum, im zweiten kann R als Teilmenge des affinen Raums aufgefaßt werden. Nachdem dann einige allgemeine Sätze über zweidimensionale, insbesondere offene projektiv-metrische Räume und den Bewegungsbegriff hergeleitet worden sind, wird als erster wichtiger Sonderfall die Geometrie von *Minkowski* behandelt, aus der durch weitere Spezialisierung die euklidische Geometrie hervorgeht. Als zweiter Sonderfall wird *Hilbert's* Verallgemeinerung der Metrik von *Cayley* betrachtet, bei der an Stelle des unendlich fernen Kegelschnitts eine beliebige konvexe Kurve tritt. Von hier aus gelangt man zur hyperbolischen Geometrie, wenn man die konvexe Kurve als Ellipse annimmt. Das fünfte Kapitel behandelt die Nichteuklidischen Geometrien in der Ebene, zunächst natürlich die hyperbolische, dann aber — als einziges Beispiel eines geschlossenen projektiv-metrischen Raums — die elliptische Geometrie. Auch die Einseitigkeit der elliptischen Ebene wird ausführlich besprochen. Das letzte Kapitel bringt in knapper Form die Verallgemeinerung auf den dreidimensionalen Fall, hier wird vieles der eigenen Arbeit des Lesers überlassen, während die Darstellung in den früheren Kapiteln in allen Einzelheiten ausgearbeitet ist und für die Selbsttätigkeit des Lesers durch das am Ende der Kapitel zur Lösung vorgelegte reichliche Aufgabenmaterial gesorgt wird.

Das Buch sei allen geometrisch interessierten Lesern wärmstens empfohlen!

J. Radon, Wien

Mathematics in Action. Von *O. G. Sutton*. Mit 52 Textabb., VIII, 226 S. London: G. Bell and Sons, Ltd. 1954. Geb. 16 s. net.

An einer Reihe gut gewählter Beispiele zeigt der Verf. die Unentbehrlichkeit mathematischer Überlegungen in der Physik und einleitend wird die Wechselbeziehung zwischen den physikalischen Problemen und dem mathematischen Modell beschrieben. Es folgt die Bereitstellung einiger mathematischer Hilfsmittel: Komplexe Zahlen, ein Hinweis auf nichteuklidische Geometrien und eine Beschreibung der Differential- und Integralrechnung, wobei das Integral einer monotonen Funktion recht anschaulich erklärt wird. Differentialgleichungen werden an Hand wichtiger physikalischer Anwendungen erläutert. Der weitere

Inhalt des Buches zeigt deutlich des Autors Berufsneigungen: Besonders ausführlich wird auf ballistische und aerodynamische Fragen eingegangen, den Abschluß bildet eine Einführung in die Statistik und in die grundlegenden mathematischen Überlegungen der Meteorologie. Das Buch ist für den gebildeten Laien und den Studierenden der ersten Semester gedacht. Der Autor hat es verstanden, auch schwierigere Fragen geschickt diesem Leserkreis näherzubringen. Einige Stellen müßten wohl korrigiert werden. S. 27 hat man den Eindruck, daß nur eine komplexe Veränderliche als Variable bezeichnet werden soll, der Begriff der Funktion ist so erklärt (S. 38), daß etwa die Konstante nicht darunterfällt. Obwohl sogar zwischen Fourierschen und trigonometrischen Reihen unterschieden wird, behauptet Verf. auf S. 101, daß die Fourierreihe einer stetigen Funktion konvergiert. Im Anhang auf S. 214 muß der unvoreingenommene Leser den Eindruck gewinnen, als ob stetige Funktionen durch die Zwischenwert-eigenschaft charakterisiert wären.

L. Schmetterer, Wien

Angewandte Mathematik. Herausgegeben von *A. Walther*. Teil I: Unter Mitwirkung von Collatz, Dreyer, Geppert, Hosemann, Kron, Lorey, Lyra, Rehbock, Rohrbach, Schulz, Ullrich, Unger. 307 S. — Teil II: Unter Mitwirkung von Bornscheuer, Föppl, Gottwald, Hamel, Klotter, Küßner, Maier, Mönch, Oppelt, Pöschl, Riekert, Schmidt, Schnadel, Stüper. 161 S. („Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939—1946“. Für Deutschland bestimmte Ausgabe der Fiat Review of German Science.) Weinheim a. d. Bergstraße: Verlag Chemie, G. m. b. H. 1954.

Reichlich spät, nämlich fast 9 Jahre nach Ende des Krieges kamen die letzten Bände der Fiat Reviews heraus. Dabei hatten manche Autoren nur wenige Wochen Zeit, um ihre Aufsätze zu verfassen. Es waren dies natürlich Autoren, die erst ganz zuletzt einsprangen. Dadurch konnten die Berichte nicht gleichmäßig ausgefeilt werden. Erschwerend war auch der Umstand, daß sehr viele Unterlagen nicht mehr zugänglich sind und manche Autoren sich auf das Erinnerungsvermögen verlassen mußten. Trotz allem gelang es, eine umfassende Übersicht über die deutschen Forschungsergebnisse der Kriegszeit zu erreichen. Die beiden Bände sind der angewandten Mathematik gewidmet. Band I enthält größere Berichte über praktische Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik, ferner kleinere Beiträge über Gegenstände, die besonders im Kriege wichtig waren, wie Verfolgungskurven, Chiffrieren und Dechiffrieren. Band II enthält im allgemeinen kürzere Berichte, und zwar über Elastizitätstheorie, Statik, Spannungsoptik, Schwingungen, Flugmechanik usw. Fast alle Berichte bringen ausführliche Literaturangaben. Beide Bücher sind sehr wertvolle Quellen- und Nachschlagwerke.

N. Hofreiter, Wien

Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Von *N. I. Muskhelishvili*. Aus dem Russischen übersetzt von *J. R. M. Radok*. XXXI, 704 S. Groningen: P. Noordhoff Ltd. 1953. hfl. 38.—.

Das Buch behandelt hauptsächlich zwei Aufgabenkreise: die ebene Elastizitätstheorie und die Biegung und Torsion von Balken. Zum Unterschied von anderen Büchern über Elastizitätstheorie ist dieses Werk durch stärkere Betonung mathematischer Gesichtspunkte ausgezeichnet. Die physikalische Seite der Probleme wird jedoch dabei niemals vernachlässigt. Hiedurch ergibt sich ein bedeutender Gewinn an Systematik und Übersichtlichkeit.

Die einleitenden Kapitel bringen die Grundbegriffe der Elastizitätstheorie. Sie sind infolge des Verzichtes auf abkürzende Schreibweisen etwas schleppend zu lesen. — In der ebenen Elastizität bildet die elegante und leistungsfähige komplexe Darstellung von Spannungszuständen den Kernpunkt der Darstellung. Bekanntlich gelingt so mit einfachen funktionentheoretischen Hilfsmitteln die Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben für Gebiete, die sich durch rationale Funktionen konform auf den Einheitskreis abbilden lassen. Für kompliziertere Fälle werden als weiteres Hilfsmittel durch Rechnen mit Cauchyschen Integralen aufgestellte Integralgleichungen eingeführt. Diese sind auch als Mittel für Existenzbeweise und als Ausgangsbasis für Näherungen geeignet (der letzte Punkt wird allerdings nicht weiter ausgeführt). — Die Untersuchung der Biegung und Torsion benützt ähnliche Methoden; hier ist besonders die weitgehende Bearbeitung von Balken, die aus ungleichartigen Materialien zusammengesetzt sind, hervorzuheben.

Alle allgemeinen Resultate werden durch durchgerechnete praktisch wichtige Beispiele illustriert.

Das Buch, das in hohem Maße auf eigenen Arbeiten *Muskhelishvili* beruht, berücksichtigt die russische Literatur bis 1949 wohl vollständig. Auch wichtigere Arbeiten aus anderen Ländern sind zumindest angeführt.

Es ist klar, daß die Herausgabe der Übersetzung dieses hervorragenden Werkes eine verdienstvolle Tat der Verlagsanstalt darstellt.

Die Ausstattung ist sehr gut, im Formelsatz sind einige wenige leicht durchschaubare Druckfehler stehen geblieben.

P. Schiske, Berlin

Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields. Von K. O. Friedrichs. VIII, 272 S. New York: Interscience Publishers, Inc. 1953. \$ 6.—.

In diesem hochbedeutsamen Werk unternimmt es der Verfasser, die Quantentheorie der Felder auf eine mathematisch einwandfreie Basis zu stellen. Dabei beschränkt sich die Darstellung nicht auf die allgemein begrifflichen Grundlagen allein. — Die Methode der Diracfunktion wird stets vermieden. Weiter ist ein charakteristischer Zug des Buches, daß der übliche Kunstgriff, ein Feld zunächst in einen Kasten einzusperren, um so für die Energie ein reines Punktspektrum zu erhalten und dann den Kasten unbegrenzt wachsen zu lassen, nicht benutzt wird, sondern daß gleich das ganze Feld betrachtet wird. Dabei werden „Hermiteische Funktionale“ eingeführt, welche Verallgemeinerungen der Hermiteischen Polynome sind (interessant ist die Skizze eines Integrationsprozesses im Hilbertschen Raum). Es wird die Partikeldarstellung bevorzugt, aber es wird gezeigt, daß es Felder gibt, welche keine Partikeldarstellung besitzen (myriotische Felder). Wir wollen, ohne auf weitere Einzelheiten einzugehen, nur noch auf die Behandlung der zweiten Quantelung hinweisen, welche befriedigender und einfacher als die sonst übliche ist.

Das Buch enthält eine Fülle neuer Ergebnisse, die nicht nur vom mathematischen Standpunkt aus interessant sind, sondern auch physikalische Bedeutung haben. Die Darstellung ist stets klar und verständlich.

E. Hlawka, Wien

Vor kurzem erschien:

Ausgewählte Aufgaben und Probleme aus der Experimentalphysik.

Eine Einführung in die exakte Behandlung physikalischer Fragestellungen. Zugleich dritte, vermehrte Auflage der Ergänzungen zur Experimentalphysik. Von Dr. **H. Greinacher**, vorm. o. Professor der Physik an der Universität Bern. Mit 117 Textabbildungen. IX, 266 Seiten. 1953.

Steif geheftet S 87.—, DM 14.50, \$ 3.45, sfr. 14.80.

„Zur unveränderten zweiten Auflage wurden 22 Kapitel aus allen Gebieten der Physik hinzugenommen und dieser als „Neue Folge“ angegliedert. Es handelt sich wieder um sehr instruktive Beispiele, die zum Teil auf Veröffentlichungen des Verfassers zurückgehen. Besonders zu erwähnen ist der logisch-didaktische Aufbau der einzelnen Kapitel: Zunächst wird in wenigen Worten der physikalische Tatbestand festgestellt. Darauf folgen prägnante Fragen, die einen einfachen Ansatz gestatten. Jahrzehntelange Erfahrungen in der Lehrtätigkeit ermöglichen es dem Verfasser, an diesen Stellen immer wieder auf zunächst naheliegende Fehler hinzuweisen. Den Kapitelschluß bilden meist ein oder zwei kleine Aufgaben, an denen der Leser ersieht, ob ihm die Zusammenhänge klar sind“.

Acta Physica Austriaca

„Besser als im Titel kommen Ziel und Inhalt des Buches im Untertitel zum Ausdruck. An 90 sehr geschickt gewählten, allmählich vom Leichten zum Schwierigen aufsteigenden Aufgaben kann ein mitarbeitender Leser ausgezeichnet die Lösung physikalischer Probleme mit Hilfe von elementaren mathematischen Verfahren erlernen. Die Aufgaben erstrecken sich auf das Gesamtgebiet der heutigen Physik bis zur Gruppengeschwindigkeit der Materiewellen. Ein großer Teil der Aufgaben findet sich in keinem der üblichen Lehrbücher und ist darum besonders reizvoll . . .“

Naturwissenschaftliche Rundschau

Acta Physica Austriaca. Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von **K. W. Fritz Kohlrausch** †, Graz, und **Hans Thirring**, Wien. Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz.

Zuletzt erschien:

8. Band, 4. (Schluß-)Heft. (Ausgegeben im Juli 1954.) Mit 28 Textabbildungen und 3 Tafeln. 88 Seiten. 1954. S 118.—, DM 19.80, \$ 4.70, sfr. 20.20

Inhaltsverzeichnis: **Gabler, F.** Dr. Karl Reichert †. — **Tomiser, J.** Eigendruckverbreiterung der Kaliumlinien 7664,91 ÅE und 7698,98 ÅE und ihrer ZEEMAN-Komponenten in Absorption. — **Harmuth, H.** Die Ausnützung gekrümmter Kennlinien für die höheren Grundrechnungsarten in elektronischen Rechenmaschinen. — **Florian, A.** und **P. Urban.** Matrixelemente und Integrale für das Schalenmodell der leichten Kerne. — **Cap, F.** und **W. Röver.** Lichtwege in inhomogenen, absorbierenden, isotropen Medien. — **Mitter, H.** und **P. Urban.** Zur Streuung schneller Elektronen. III. Strahlungskorrekturen. — **Krzywoblocki, M. Z. v.** On the Stability of BÉNARD-KÁRMÁN Vortex Street in Compressible Fluids. II. — **Smekal, A.** und **R. Steinmayer.** Die österreichisch-deutsche Physikertagung in Innsbruck 1953. — Buchbesprechungen.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung